



***Facultad  
de  
Ciencias***

**DINÁMICA DE DOS AGENTES EN EL  
MODELO DE KURAMOTO GENERALIZADO**  
(Dynamics of two agents in the generalized  
Kuramoto Model)

Trabajo de Fin de Grado  
para acceder al

**GRADO EN FÍSICA**

Autor: Diego Martínez Echevarría

Director: Diego Pazó Bueno

Junio - 2019

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Modelo de Kuramoto . . . . .	1
1.1.1	Parámetro de orden . . . . .	2
1.1.2	Sincronización . . . . .	2
1.1.3	Sincronización macroscópica . . . . .	3
1.2	Modelo de agentes en dimensión $D$ . . . . .	4
1.2.1	Parámetro de orden $\rho$ . . . . .	5
1.2.2	Cambios en $K_c$ con la dimensión. . . . .	5
<b>2</b>	<b>Puntos fijos, ciclos límite y bifurcaciones</b>	<b>7</b>
2.1	Sistema continuo autónomo . . . . .	7
2.2	Puntos fijos . . . . .	7
2.2.1	Puntos fijos en una dimensión . . . . .	7
2.2.2	Linealización . . . . .	8
2.2.3	Puntos fijos en dos dimensiones . . . . .	9
2.3	Ciclos límite . . . . .	10
2.4	Bifurcaciones . . . . .	10
2.4.1	Silla-nodo . . . . .	11
2.4.2	Pitchfork (subcrítica) . . . . .	12
2.4.3	Hopf (subcrítica) . . . . .	13
2.4.4	Silla-nodo de ciclos . . . . .	15
2.4.5	Pitchfork de ciclos . . . . .	15
2.4.6	Bifurcación homoclínica . . . . .	15
2.5	Codimensión . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Resultados</b>	<b>18</b>
3.1	Sistema de referencia . . . . .	18
3.1.1	Sistema de coordenadas . . . . .	18
3.1.2	$K$ vs. $ \omega $ . . . . .	19
3.2	Propiedades generales . . . . .	19
3.2.1	Desarrollo de las ecuaciones . . . . .	19
3.2.2	Sistema desacoplado . . . . .	20
3.3	Simetrías . . . . .	20
3.3.1	Simetrías del modelo . . . . .	20
3.3.2	Simetrías del modelo con $N = 2$ . . . . .	21
3.4	Atractores para $K > 0$ . . . . .	21
3.4.1	Solución periódica . . . . .	21
3.4.2	Puntos fijos . . . . .	22
3.4.3	Biestabilidad . . . . .	22
3.5	Transiciones entre soluciones . . . . .	23
3.5.1	$K$ bajo . . . . .	23
3.5.2	$K$ alto . . . . .	26
3.5.3	$K$ negativo . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>29</b>
<b>A</b>	<b>Código</b>	<b>30</b>

## Resumen

El modelo de Kuramoto, propuesto en 1975, es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que describe un conjunto de osciladores de fase. Es capaz de emular fenómenos de autoorganización y es similar en varios aspectos al modelo XY de la Mecánica Estadística. Recientemente, en un artículo publicado por Chandra, Girvan y Ott[1] se ha propuesto una generalización del modelo de Kuramoto, en el que los agentes son representados por vectores  $D$ -dimensionales unitarios. En el artículo mencionado se estudian las transiciones de fase del modelo para un  $D$  arbitrario cuando el número de agentes  $N$  tiende a infinito (límite termodinámico).

En este trabajo hemos querido estudiar el comportamiento del modelo cuando el número de agentes es bajo. La presencia de bifurcaciones, la relevancia de nuevos parámetros o fenómenos de histéresis, ya en casos muy simples del modelo, nos han llevado a centrarnos en un caso específico: se han estudiado los tipos de solución y las bifurcaciones en el modelo de Kuramoto generalizado, considerando dos agentes con  $D = 3$ .

En el primer capítulo se expone el modelo de Kuramoto y su versión generalizada. En el segundo capítulo se exponen técnicas y fundamentos de la dinámica no lineal. En el tercer capítulo se exponen los resultados del TFG y en el cuarto las conclusiones de los mismos. Por último, el trabajo tiene un apéndice en el que se exponen las piezas clave del código.

**Palabras clave:** modelo de Kuramoto, Dinámica no Lineal, bifurcación, sincronización.

### **Abstract**

The Kuramoto model, proposed in 1975, is a set of ordinary differential equations that describe a group of phase oscillators. It is capable of emulating self-organization phenomena and it is similar in several ways to the XY model of Mechanical Statistics. Recently, in an article written by Chandra, Girvan and Ott[1] a generalized Kuramoto model has been proposed, in which the agents are represented by  $D$ -dimensional unitary vectors. In the mentioned paper the model is studied when the number of agents  $N$  tends to infinity (the thermodynamic limit).

In this work we have decided to study the behaviour of the model when the number of agents is low. The presence of bifurcations, the relevance of new parameters and the hysteresis phenomena, already present in simple scenarios of the model, have led us to focus on a specific case: we have studied the solution types and bifurcations in the generalized Kuramoto model considering two agents with  $D = 3$ .

In the first chapter we expose the Kuramoto model and its generalized version. In the second chapter we expose the required techniques and basics of Nonlinear Dynamics. In the third chapter we expose the results of this Degree's Final Work and in the fourth the conclusions of it. Lastly, the work includes an appendix in which the key parts of the code are presented.

**Key words:** Kuramoto model, Nonlinear Dynamics, bifurcation, synchronization.

# Capítulo 1

## Introducción

Desde los aplausos en las salas de teatro hasta los parpadeos luminiscentes de las luciérnagas en las selvas asiáticas, los fenómenos de sincronización colectiva están presentes en diversas situaciones y escalas. Fenómenos en los que, sin existir ningún tipo de plan o director, los agentes implicados —humanos, luciérnagas o células— alcanzan una frecuencia conjunta, un mismo ritmo.

No se necesitan intrincadas fórmulas para modelizar la autoorganización que surge de la interacción entre los agentes. El modelo propuesto por Kuramoto en 1975 emula los fenómenos de sincronización utilizando osciladores de fase, completamente caracterizados por una sola variable  $\psi$ . Pese a esta aparente simplicidad, el modelo de Kuramoto es capaz de representar características generales de fenómenos de autoorganización en sistemas físicos. Ejemplos de estos sistemas son las series de uniones de Josephson, las reacciones químicas acopladas o las células marcapaso del corazón.

Recientemente se ha publicado un artículo en el que se propone y estudia un modelo de Kuramoto generalizado[1], en el que el estado de los agentes viene descrito por su posición sobre la superficie de una esfera  $D$ -dimensional. En el mismo artículo se especula con la posibilidad de describir objetos tridimensionales, en los que la dirección, y no solo la velocidad de los agentes es importante. Se considera también la posibilidad de que el modelo describa fenómenos más abstractos, como la opinión política individual y como esta varía al influenciarse por otras personas.

En cualquier caso, ambos modelos presentan un gran interés por la complejidad que encierran unas ecuaciones tan simples. Durante este capítulo presentaremos el modelo de Kuramoto y su versión generalizada.

### 1.1 Modelo de Kuramoto

En 1967, tratando de obtener una mejor comprensión de los fenómenos de sincronización en el campo de la Biología, Winfree publica un modelo[2] que describe la dinámica de  $N$  osciladores. Por oscilador entendemos un sistema que presenta un comportamiento periódico de forma estable —como un reloj de péndulo. La suposición más importante que hizo fue considerar osciladores casi idénticos y que ejercieran una influencia débil sobre los demás. Esto permite caracterizar el estado del oscilador mediante únicamente su fase  $\psi$ . El modelo de Winfree tiene la siguiente forma:

$$\dot{\psi}_i = \omega_i + \left( \sum_{j=1}^N X(\psi_j) \right) Z(\psi_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.1)$$

El primer término  $\omega_i$  representa la frecuencia natural del oscilador, la frecuencia a la que se movería de no existir los otros  $N - 1$  osciladores. El segundo término incluye la influencia del resto de osciladores  $j$  sobre el oscilador  $i$  mediante la función  $X(\psi_j)$ . La magnitud de esta función está a su vez controlada por la función sensibilidad  $Z(\psi_i)$ . El término dentro del paréntesis juega el papel de campo promedio, cuyo equivalente en el modelo de Kuramoto veremos más adelante.

Utilizando simulaciones numéricas, Winfree consiguió ver una transición de fase. Cuando utilizaba frecuencias naturales  $\omega_i$  muy dispares, cada oscilador rotaba a su frecuencia natural, con los otros osciladores perturbándolo pero no cambiando su comportamiento cualitativo. Al reducir la distancia entre los  $\omega_i$  no pasaba nada hasta que se superaba un umbral. Era entonces cuando varios de aquellos osciladores comenzaban a moverse al unísono: Winfree había conseguido un modelo capaz de emular los fenómenos de sincronización colectiva[3].

En 1975, inspirado por el modelo y los resultados de Winfree, Kuramoto propone el modelo que lleva su nombre[4][3]:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\psi_j - \psi_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.2)$$

En él, Kuramoto utiliza el seno de la diferencia entre dos fases para representar la influencia de un oscilador sobre otro, manteniendo la filosofía de osciladores idénticos y débilmente acoplados. Utiliza la constante de acoplamiento  $K$  para controlar la fuerza del acoplamiento, dividida por  $N$  para evitar problemas de divergencia en el límite termodinámico  $N \rightarrow \infty$ .

### 1.1.1 Parámetro de orden

Un problema de la ec.(1.2) es la falta de parámetros globales: tan solo conocemos las posiciones  $\psi_i$ , que no nos dicen mucho de la coherencia del sistema. Necesitamos un parámetro que nos indique el estado global del sistema, para lo que definimos el parámetro de orden

$$re^{i\Psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\psi_j} \equiv \langle e^{i\phi_j} \rangle. \quad (1.3)$$

Para entender mejor este parámetro, imaginemos a los osciladores girando sobre una circunferencia en el plano  $xy$ . Cuando  $\psi_i = 0$ , el oscilador  $i$  se encuentra en  $(x, y) = (1, 0)$ , cuando  $\psi_i = \frac{1}{2}\pi$ ,  $i$  se encuentra en el punto  $(x, y) = (0, 1)$ . Si aplicamos la fórmula de Euler, es automático que la parte real de  $e^{i\psi_i}$  es la componente en  $x$  del oscilador  $i$ , mientras que la parte imaginaria es la componente en  $y$ . Volviendo a la ecuación (1.3), es fácil ver que las partes real e imaginaria del parámetro de orden son  $\langle x \rangle$  e  $\langle y \rangle$  respectivamente:  $re^{i\Psi} = \langle x \rangle + i\langle y \rangle$ .

Separemos los osciladores en dos grupos: en el primero los osciladores giran incoherentemente y el segundo lo hacen conjuntamente, a la misma frecuencia. Para una mejor visualización imaginemos también que en el segundo grupo todos tienen fases similares,  $\psi_i \sim \psi'(t)$ .

Si el grupo dominante es el incoherente, al estar distribuidos los osciladores uniformemente sobre la circunferencia unidad,  $\langle x \rangle \sim \langle y \rangle \sim r \sim 0$ . Si en cambio la mayoría de los osciladores están en el grupo sincronizado, entonces  $e^{i\Psi} \sim \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\psi_j}$  y por tanto  $r \sim 1$ . El radio  $r(t)$  es una medida de la coherencia en la fase.

El modelo de Kuramoto puede simplificarse si se escribe en términos del parámetro de orden. Multiplicando la ec.(1.3) a ambos lados por  $e^{-i\psi_i}$  y tomando la parte imaginaria, obtenemos:

$$r \sin(\Psi - \psi_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\psi_j - \psi_i)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1.2) obtenemos una versión del modelo de Kuramoto sin el sumatorio (aunque ahora está implícito en  $r$  y  $\Psi$ ).

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \omega_i + Kr \sin(\Psi - \psi_i) \quad (1.4)$$

En esta versión del modelo de Kuramoto la evolución de cada oscilador ya no depende de todos los osciladores, sino de sí mismo y de la fase promedio.

### 1.1.2 Sincronización

Como hemos mencionado en apartados anteriores, el propósito original del modelo de Kuramoto era describir fenómenos de sincronización. El modelo es capaz de reproducir este tipo de fenómenos incluso con un número pequeño de osciladores: imaginemos un sistema de solo 2 agentes regidos por la ec. (1.2).

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \omega_1 + \frac{K}{2} \sin(\psi_2 - \psi_1) \\ \dot{\psi}_2 &= \omega_2 + \frac{K}{2} \sin(\psi_1 - \psi_2). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Nos interesa conocer como evoluciona la distancia entre estos dos osciladores, por lo que definimos la *diferencia de fase*  $\phi = \psi_1 - \psi_2$ . Derivamos y desarrollamos esta expresión:

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2 \\ &= \omega_1 - \omega_2 - K \sin \phi\end{aligned}\tag{1.6}$$

que está representada en la figura 1.1.

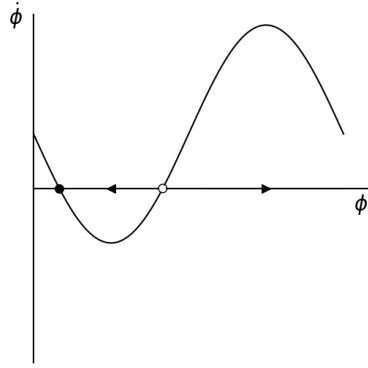


Figura 1.1: Representación de la ec.(1.6). El seno, de amplitud  $K$ , está desplazado en el eje vertical en  $\omega_1 - \omega_2$  y solo cortará a  $\dot{\phi} = 0$  si  $K > K_c$ . Adelantándonos a lo que veremos en la sección 2.2, vemos que existen dos soluciones posibles, pero nuestra atención está sobre la de menor  $\phi$  por ser estable.

Estamos buscando un punto en el que los dos agentes giren a la misma velocidad,  $\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2$ , i.e. el valor de  $\phi$  para el cual  $\dot{\phi} = 0$ . Llamaremos  $\phi^*$  a esta solución.

$$\sin \phi^* = \frac{\omega_1 - \omega_2}{K}$$

Esta ecuación tiene dos soluciones si  $|\omega_1 - \omega_2| < K$  y ninguna si  $|\omega_1 - \omega_2| > K$ . Para  $|\omega_1 - \omega_2| = K$  existe una única solución: está sucediendo lo que más adelante (sección 2.4.1) llamaremos una bifurcación silla-nodo. Denominaremos a este valor constante de acoplamiento crítica,  $K_c$ .

$$K_c = |\omega_1 - \omega_2|\tag{1.7}$$

Una componente de desorden  $\omega_1 - \omega_2$  compite con una componente atractiva,  $2K$ . Cuanto mayor sea la primera respecto a la segunda, mayor será la diferencia de fases  $\phi$  a la que se estabiliza el sistema, hasta el caso límite en el que  $K < K_c$  y la sincronización no es posible.

### 1.1.3 Sincronización macroscópica

En el subapartado anterior hemos visto como dos osciladores alcanzan un estado sincronizado siempre que  $K > K_c$ , un valor que depende de las frecuencias intrínsecas de los osciladores. Para el límite termodinámico  $N \rightarrow \infty$  ocurre un proceso análogo.

Para poder trabajar en el límite termodinámico, definimos una densidad de probabilidad  $g(\omega)$ , que definirá la distribución de las  $\omega_i$ . Se consideran distribuciones unimodales (un solo máximo) y simétricas respecto a su frecuencia promedio  $\Omega$ :  $g(\Omega + \omega) = g(\Omega - \omega)$  para todo  $\omega$ . La gran ventaja de esta suposición es que podemos definir un sistema de referencia que gire con la frecuencia  $\Omega$ , de forma que la frecuencia promedio del sistema sea 0, simplificando mucho la ec. (1.4).

Además de seleccionar un tipo de distribución  $g(\omega)$  específico, asumimos que el tipo de soluciones que buscamos tienen una coherencia estable,  $r = \text{cte}$ . Tomando estas consideraciones la  $K_c$  viene dada por[3]:

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)}\tag{1.8}$$



Para  $K < K_c$   $r = 0$ , y para  $K > K_c$   $r > 0$ . La transición de fase es de segundo orden.

Aunque no es evidente a primera vista, tiene un comportamiento muy similar a la  $K_c$  de dos osciladores (ec.(1.7)). Al ser  $g(\omega)$  una función de probabilidad —y por tanto estar normalizada— la altura del pico nos indica como de distantes son las frecuencias de  $g(\omega)$ : si las frecuencias están en promedio muy separadas el pico será muy ancho por lo que su máximo tendrá que ser bajo. Alternativamente, frecuencias muy próximas se corresponden con picos estrechos, máximos grandes.  $K_c$  crece cuando  $\langle |\omega_i - \Omega| \rangle$  disminuye.

## 1.2 Modelo de agentes en dimensión D

Recientemente se ha publicado un artículo[1] en el que se propone y estudia una generalización del modelo de Kuramoto a  $D$  dimensiones. En este modelo los agentes —ya no tienen por qué ser osciladores— se mueven sobre la superficie de una hipersfera de dimensión  $D \geq 2$ , correspondiendo el caso  $D = 2$  al modelo de Kuramoto clásico.

Para generalizar el modelo de Kuramoto a dimensiones más altas hemos de reescribir la ecuación (1.2) en términos de vectores unidad  $\sigma_i$ , que van del centro a la superficie de una hipersfera:

$$\frac{d\sigma_i}{dt} = \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N [\sigma_j - (\sigma_j \cdot \sigma_i) \sigma_i] + \mathbf{W}_i \sigma_i \quad (1.9)$$

En la figura 1.2 se han representado dos vectores unidad para una mejor visualización. En este modelo el lugar de  $\omega_i$  lo ocupa  $\mathbf{W}_i$ , una matriz  $D \times D$  antisimétrica. Para el caso  $D = 2$  en coordenadas cartesianas, por ejemplo:

$$\mathbf{W}_i = \begin{pmatrix} 0 & \omega_i \\ -\omega_i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Para el caso tridimensional el producto matricial puede ser reescrito como un producto vectorial:

$$\mathbf{W}_i \sigma_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \sigma_i \quad (1.11)$$

en el que  $\boldsymbol{\omega}_i$  es un vector de módulo  $\omega_i$ .

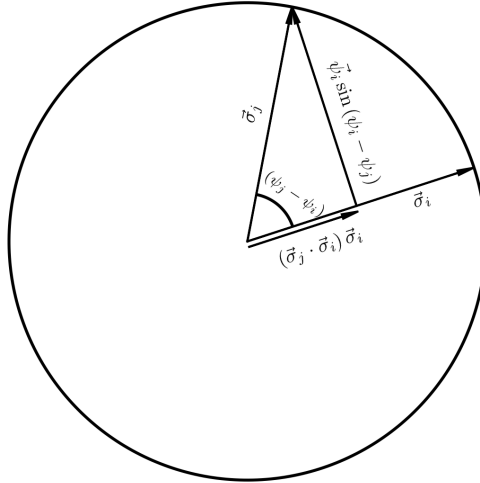


Figura 1.2: Comparación entre las variables del modelo de Kuramoto (ec.(1.2)) y su versión generalizada (ec. (1.9)) para el caso de 2 dimensiones. En ella se aprecia visualmente como  $[\sigma_j - (\sigma_j \cdot \sigma_i)] = \psi_i \sin(\psi_j - \psi_i)$ , siendo  $\psi_i$  el vector unidad que señala la dirección de  $\psi_i$  creciente.

El modelo generalizado es equivalente al modelo de Kuramoto para  $D = 2$ , lo cual se ve claramente si tomamos coordenadas polares: el término con el sumatorio es siempre perpendicular a  $\sigma_i$  (figura 1.2) y

también lo es el término de  $\mathbf{W}_i$ . La variación temporal de  $\boldsymbol{\sigma}$  es siempre perpendicular a  $\boldsymbol{\sigma}$ , lo que significa que su radio es constante, 1. Por tanto, si descomponemos a  $\boldsymbol{\sigma}$  en su componente radial y su componente angular obtenemos  $|\boldsymbol{\sigma}_i| = 1$  como primera ecuación y (1.2) como la segunda.

El modelo generalizado propone un sistema de  $D$  ecuaciones por agente,  $N \cdot D$  ecuaciones, aunque este número se reduce a  $N \cdot (D - 1)$  eligiendo bien nuestro sistema de referencia, ya que por definición  $|\boldsymbol{\sigma}|^2 = 1$ .

### 1.2.1 Parámetro de orden $\boldsymbol{\rho}$

De forma análoga al parámetro de orden del modelo de Kuramoto, en el modelo generalizado introducimos el parámetro de orden  $\boldsymbol{\rho}$ :

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\sigma}_i. \quad (1.12)$$

El módulo de  $\boldsymbol{\rho}$  nos indica la coherencia del sistema: de forma idéntica a  $r$ ,  $|\boldsymbol{\rho}| = 1$  indica un estado en el que  $\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\sigma}_j$  para todo  $i, j$  mientras que  $|\boldsymbol{\rho}| = 0$  indica que la distribución es uniforme o simétrica. Incluyendo este parámetro en la ecuación (1.9) obtenemos

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}_i}{dt} = K [\boldsymbol{\rho} - (\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\sigma}_i) \boldsymbol{\sigma}_i] + \mathbf{W}_i \boldsymbol{\sigma}_i \quad (1.13)$$

Esta es la ecuación que se ha utilizado para las simulaciones, pero habiendo aplicado antes (1.11):

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}_i}{dt} = K [\boldsymbol{\rho} - (\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\sigma}_i) \boldsymbol{\sigma}_i] + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{\sigma}_i \quad (1.14)$$

### 1.2.2 Cambios en $K_c$ con la dimensión.

El principal resultado del artículo en el que se propone la generalización del modelo de Kuramoto[1] es el comportamiento cualitativamente distinto de la coherencia entre sistemas con dimensión par y sistemas con dimensión impar. Estos resultados muestran que para dimensiones pares (como el modelo original de Kuramoto,  $D = 2$ ) los estados son incoherentes cuando  $K$  es pequeño. Si aumentamos  $K$  la incoherencia se mantiene hasta que se alcanza un valor crítico  $K_c > 0$ , momento en el cual se empieza a formar un enjambre (un grupo de agentes moviéndose sincronizados).

Para  $D$  impar, por otra parte, se dan fenómenos de sincronización para cualquier valor positivo de  $K$ , o lo que es lo mismo  $K_c = 0$ . Curiosamente, pese a que en  $K = 0$  el estado es incoherente, la coherencia ( $|\boldsymbol{\rho}|$ ) no tiende a 0 cuando  $K \rightarrow 0^+$ .

El modelo de Kuramoto y su generalización en  $D = 3$  son análogos, hasta cierto punto, al modelo XY y el modelo de Heisenberg, respectivamente. En estos modelos el hamiltoniano depende de los productos escalares de los espines  $\boldsymbol{\sigma}_i$ :

$$H \propto J \sum_{i,j} \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j = J \sum_{i,j} \cos(\psi_i - \psi_j)$$

La dinámica de este sistema está definida a través de un hamiltoniano. Por suerte, el sistema de Kuramoto sin heterogeneidad es un sistema de gradiente. Citando al libro de Strogatz[5] (pg. 199) sobre estos sistemas:

Suppose the system can be written in the form  $\dot{\mathbf{x}} = -\nabla V$ , for some continuously differentiable, single-valued scalar function  $V(\mathbf{x})$ . Such a system is called a gradient system with potential function  $V$ .

Las funciones potencial son un trasunto de la energía en sistemas que no tienen por qué tener nada que ver con la mecánica. El valor de la función potencial del sistema de Kuramoto en el sistema de referencia  $\Psi = \Omega$  es:

$$V = -\frac{K}{2N} \sum_{i,j} \cos(\phi_i - \phi_j) = -\frac{K}{2N} \sum_{i,j} \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j$$

Para una deducción rigurosa ir al artículo de Van Hemmen y Wreszinski[6].

La similitud entre el modelo de Kuramoto y el XY es especialmente clara ahora. No es sorprendente, por lo tanto, que ambos sufran transiciones de fase similares. Ambos presentan en sus ecuaciones elementos

que tienden a ordenar el sistema —constantes de acoplamiento  $K$  en Kuramoto,  $J$  en XY— frente a elementos disruptivos, que introducen ruido —la dispersión de  $g(\omega)$  en Kuramoto, la temperatura en XY. Cuando en estos sistemas se aumenta el acoplamiento o se reduce el parámetro de desorden, ocurre una transición de fase.

Es por esto que resulta sorprendente el comportamiento del modelo de Kuramoto generalizado en  $D = 3$ . Mientras que su análogo, el modelo de Heisenberg, presenta una transición de fase como el modelo XY para un cierto  $J_c > 0$ , el modelo generalizado se encuentra en un estado coherente para todo  $K > 0$ ,  $K_c = 0$ .

En este TFG se han estudiado los diferentes estados y transiciones presentes en un modelo generalizado de Kuramoto de dimensión  $D = 3$  con dos agentes de mismo módulo de  $\omega_i$ .

## Capítulo 2

# Puntos fijos, ciclos límite y bifurcaciones

Para comprender el comportamiento del modelo generalizado de Kuramoto tendremos que hacer uso de la teoría de los sistemas dinámicos. A lo largo de este capítulo se expondrán los conceptos y la nomenclatura que se utilizará para describir el sistema en el capítulo siguiente. Primero se describirán los puntos fijos y los ciclos límite, elementos clave para entender estados específicos de un sistema. Describas las diferentes variedades de puntos fijos y ciclos límite continuaremos con las bifurcaciones, los mecanismos mediante los cuales el sistema lleva a cabo cambios cualitativos en sus estados.

Todas las definiciones dentro de este capítulo, salvo que se indique lo contrario, han sido extraídas de *Nonlinear Dynamics and Chaos*, de S.H. Strogatz[5].

### 2.1 Sistema continuo autónomo

Todo lo relevante a este trabajo —tanto el modelo de Kuramoto como su versión generalizada— está en el marco de los sistemas dinámicos continuos y autónomos. Esto quiere decir que el sistema está gobernado por una EDO o sistema de EDOs que determina(n) la velocidad de sus componentes:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_d) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, \dots, x_d) \\ &\vdots \\ \frac{dx_d}{dt} &= f_d(x_1, \dots, x_d).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Que el sistema sea autónomo significa que  $f_n$  no depende explícitamente del tiempo, tan solo de la posición  $x_1, x_2, \dots, x_d$ . La principal implicación de esto es que la velocidad  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_d$  del sistema tan solo depende del punto en el que se encuentra, es independiente del recorrido previo.

### 2.2 Puntos fijos

Una pieza clave en la dinámica de un sistema, junto a los ciclos límite, son los puntos fijos o de equilibrio: aquellos puntos en los cuales la velocidad se anula. Si conocemos las localizaciones y las características de todos los puntos fijos conoceremos en buena medida el comportamiento cualitativo del sistema.

#### 2.2.1 Puntos fijos en una dimensión

Imaginemos un sistema de la forma:

$$\dot{x} = f(x)\tag{2.2}$$

Un punto fijo se encuentra en  $x^*$  si  $f(x^*) = 0$ . Una condición inicial situada exactamente en  $x^*$  no tendrá velocidad, se mantendrá *fija* en  $x^*$ .

No obstante, en un sistema físico real, es improbable que un agente se encuentre con infinita precisión sobre un punto fijo. Por esto es importante conocer no solo la localización del punto fijo, sino cómo se comportará el sistema en torno él. En otras palabras: conocer su estabilidad.

Como explicación grosera, lo que queremos hacer es introducir un desplazamiento respecto a  $x^*$  y observar si el sistema nos devuelve al punto fijo o nos aleja más todavía. Para que un punto fijo sea estable  $f(x^* + \delta x)$  ha de tener el signo contrario al desplazamiento  $\delta x$ , y lo contrario para un punto fijo inestable:

$$\begin{aligned} f(x - \delta x) \geq 0 \geq f(x + \delta x) & \quad \text{Estable} \\ f(x - \delta x) \leq 0 \leq f(x + \delta x) & \quad \text{Inestable} \\ \left. \begin{aligned} f(x - \delta x) &> 0 < f(x + \delta x) \\ f(x - \delta x) &< 0 > f(x + \delta x) \end{aligned} \right\} & \quad \text{Semiestable} \end{aligned} \quad (2.3)$$

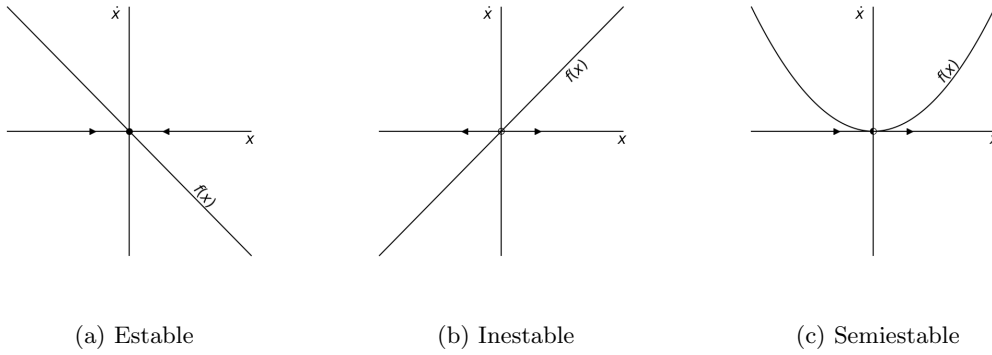


Figura 2.1: Diferentes tipos de estabilidad en un sistema 1D. Se ha utilizado el punto fijo coloreado para representar estabilidad y el vacío para representar inestabilidad. Las flechas indican el sentido de  $\dot{x}$  en las diferentes zonas.

Los puntos fijos semiestables son una singularidad: si modificamos ligeramente un parámetro de la función  $f(x)$  un punto fijo estable o inestable cambiará ligeramente, preservándose el comportamiento cualitativo del sistema. Sin embargo, si variamos ligeramente un sistema que presenta un punto fijo semiestable,  $f(x)$  pasará a cortar  $\dot{x} = 0$  en dos o ningún valores. En el primer caso aparecen un punto fijo estable y otro inestable; en el segundo el punto fijo desaparece. Esta característica se describirá en la sección 2.5 sobre la codimensión.

Más figuras y ejemplos sobre estabilidad en 1D en páginas 18-21[5].

## 2.2.2 Linealización

Además de conocer la estabilidad de un punto fijo, nos interesa saber cómo crecen o decrecen las perturbaciones en el entorno de un punto fijo. Para ello recurrimos al método de la linealización.

Continuando con la notación expuesta en (2.2) definimos una pequeña perturbación en torno a  $x^*$ ,  $\delta x(t) = x(t) - x^*$ . Es automático que

$$\delta \dot{x} = \frac{d}{dt}(x - x^*) = \dot{x}$$

por lo que también se cumple que  $\delta \dot{x} = f(x) = f(x^* + \delta x)$ . Desarrollando en Taylor:

$$f(x^* + \delta x) = f(x^*) + \delta x f'(x^*) + O(\eta^2)$$

Por definición de  $x^*$ , el primer término del desarrollo es nulo. Linealizar consiste en despreciar los términos  $O(\delta x^2)$  ( $\eta$  es pequeño) para obtener la expresión

$$\delta \dot{x} \approx \delta x f'(x^*)$$

Nótese que esta aproximación solo tiene sentido si  $f'(x^*) \neq 0$ .

Resolviendo la EDO:

$$\delta x(t) \approx \delta x(0) e^{f'(x^*)t} = \delta x(0) e^{\lambda t} \quad (2.4)$$

Donde  $\lambda$  es el coeficiente de Lyapunov, que determina la velocidad de expansión de una perturbación. Las perturbaciones  $\delta x(t)$  en torno a un punto fijo  $x^*$  crecen exponencialmente si  $\lambda$  es positivo y decaen exponencialmente si es negativo.

### 2.2.3 Puntos fijos en dos dimensiones

En este apartado se tratará un sistema de 2 dimensiones, pero fácilmente extrapolable a N dimensiones.

Consideremos una versión 2D de la ecuación (2.2):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \quad (2.5)$$

El nuevo punto fijo  $(x^*, y^*)$  será aquel para el cual tanto  $f$  como  $g$  se anulan. Definimos dos variables análogas a  $\eta$  de la sección 2.2.2:

$$\delta x = x - x^*, \quad \delta y = y - y^*$$

Desarrollamos en Taylor  $f(x, y)$  en torno a un punto fijo:

$$\begin{aligned} \delta \dot{x} &= f(x^* + \delta x, y^* + \delta y) \\ &= f(x^*, y^*) + \delta x \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(x^*, y^*)} + \delta y \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(x^*, y^*)} + O(\delta x^2, \delta y^2, \delta x \delta y) \\ &\approx \delta x \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(x^*, y^*)} + \delta y \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{(x^*, y^*)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Donde hemos vuelto a despreciar los términos cuadráticos y de mayor orden. Existen casos límite en los que esta aproximación no es válida (pg. 151[5]). Repitiendo el proceso para  $g(x, y)$ :

$$\delta \dot{y} \approx \delta x \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{(x^*, y^*)} + \delta y \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)_{(x^*, y^*)} \quad (2.7)$$

Para englobar estas dos expresiones se define la matriz Jacobiana  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)} \quad (2.8)$$

Obteniendo el sistema linealizado:

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

El sistema linealizado es una aproximación y solo tiene sentido en el entorno de  $(x^*, y^*)$ .

Las propiedades de los puntos fijos se pueden obtener a partir de los autovalores  $\lambda_i$  y autovectores de  $\mathbf{A}$ . Como ocurría con la ecuación (2.4), si la parte real del autovalor es negativa, el punto fijo será atractivo (estable) en la dirección del autovector correspondiente, mientras que será repulsivo (inestable) si la parte real es positiva. Además, una componente imaginaria no nula en  $\lambda_i$  implica velocidad angular en torno al punto fijo. Sabiendo esto podemos clasificar los puntos fijos más allá de su estabilidad. A continuación se listan los casos robustos, en los cuales una pequeña modificación de los parámetros del sistema no afecta al comportamiento cualitativo del punto fijo:

- Repelores (*repellers/sources*): todos los autovalores tienen una componente real positiva. En todas las zonas de su entorno la velocidad radial es positiva.
- Atractores: todos los autovalores tienen una componente real negativa. En cualquier punto de su entorno la velocidad radial es negativa.
- Sillas (*saddles*):  $\mathbf{A}$  tiene al menos un autovalor positivo y otro negativo. Al ser atractivo en un autovector y repulsivo en otro, las trayectorias se acercan al punto fijo a través del autovector correspondiente al autovalor negativo y escapan a través del autovector correspondiente al autovalor positivo.

Para más información sobre casos marginales, ir a pg. 154 [5].

Para ver un ejemplo ilustrativo sobre el proceso de linealización ir a las páginas 153-154 de [5].

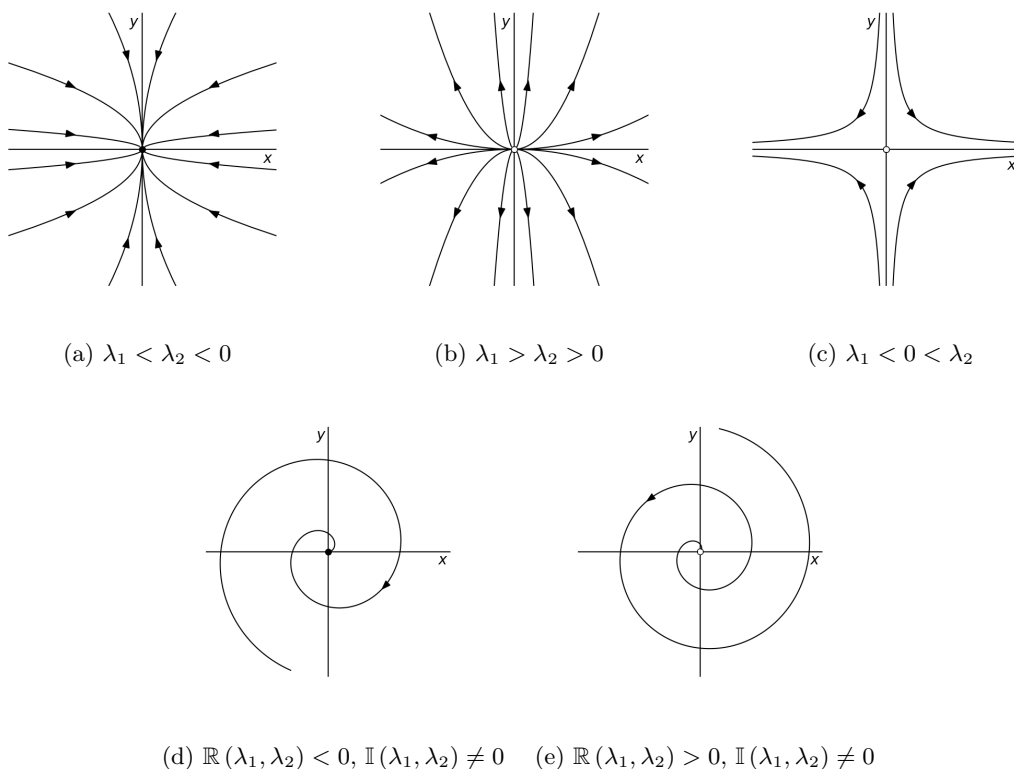


Figura 2.2: Distintos tipos de puntos fijos según los autovalores  $(\lambda_1, \lambda_2)$  de la matriz Jacobiana  $A$ : Nodo estable (a), nodo inestable (b), silla (c), foco estable (d), foco inestable (e).

## 2.3 Ciclos límite

En sistemas de dimensión 1 los puntos fijos son las únicas “trayectorias” que no cambian cuando  $t \rightarrow \infty$ . Para sistemas de dimensión mayor, además de los puntos fijos, existen los ciclos límite, trayectorias propiamente dichas en las que un punto en el ciclo se mantendrá en él indefinidamente: este es el caso de un oscilador.

Un ciclo límite es una trayectoria cerrada y aislada[5]. Al estar en un sistema autónomo, que la trayectoria sea cerrada implica también que es periódica. Que la trayectoria sea aislada significa que no hay otras trayectorias cerradas en su entorno: o bien se acercan asintóticamente al ciclo límite o bien se alejan de él. De forma análoga a los puntos fijos, se denominan estables o atractivos aquellos ciclos límites en los que las trayectorias vecinas se acercan a él, e inestables aquellos en los que las trayectorias se alejan.

Un sistema lineal  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  no puede tener ciclos límites. Si el sistema tiene una trayectoria cerrada en  $\mathbf{x}(t)$ , entonces las trayectorias vecinas  $(1 \pm \delta)\mathbf{x}(t)$  también serán trayectorias cerradas, por lo que  $\mathbf{x}(t)$  no será una trayectoria aislada.

En la figura 2.3 se muestran dos casos de ciclos límite y un centro, que no ha de confundirse con un ciclo límite.

## 2.4 Bifurcaciones

En los apartados sobre puntos fijos 2.2 y ciclos límite 2.3 se han comentado las características de sistemas dinámicos determinados por funciones  $f$ . No obstante, ¿qué ocurre con los puntos fijos y ciclos límite si cambiamos los parámetros de  $f$ ? En esta sección analizamos los diferentes mecanismos a través de los cuales los sistemas dinámicos pueden cambiar su comportamiento cualitativamente.

Citando a Strogatz[5] en su capítulo de bifurcaciones en 2D: “La definición típica tiende a incluir el concepto de ‘equivalencia topológica’: si el retrato de fase —*phase portrait*, la representación del conjunto de trayectorias— cambia su estructura topológica al variar un parámetro, ha ocurrido una bifurcación. Los ejemplos de esto incluyen cambios en el número o la estabilidad de puntos fijos, órbitas cerradas o

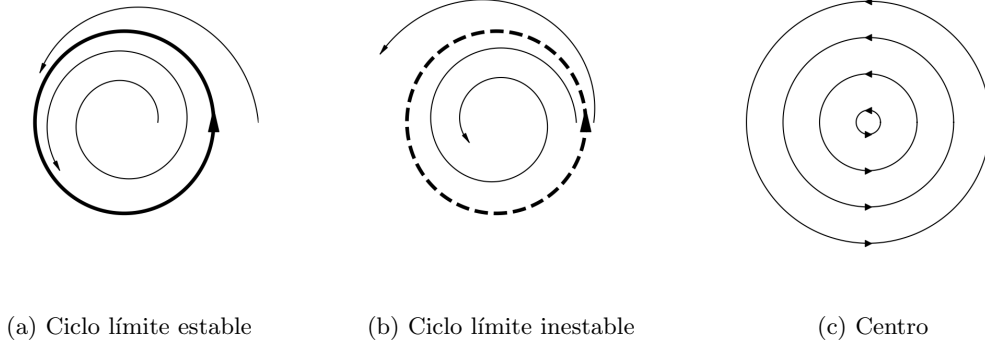


Figura 2.3: Ciclo límite estable, ciclo límite inestable y un centro. El último no es un ciclo límite, ya que las trayectorias que presenta, aunque cerradas, no están aislados.

conexiones de silla al cambiar un parámetro”.

### 2.4.1 Silla-nodo

La bifurcación silla nodo es el mecanismo básico mediante los puntos fijos son creados o aniquilados entre sí[5]. El nombre de la bifurcación se debe a que en ella están implicados un punto fijo estable (nodo) y uno inestable (silla).

Un ejemplo sencillo de sistema que presenta una bifurcación de este tipo es el siguiente:

$$\dot{x} = a - x^2 \quad (2.10)$$

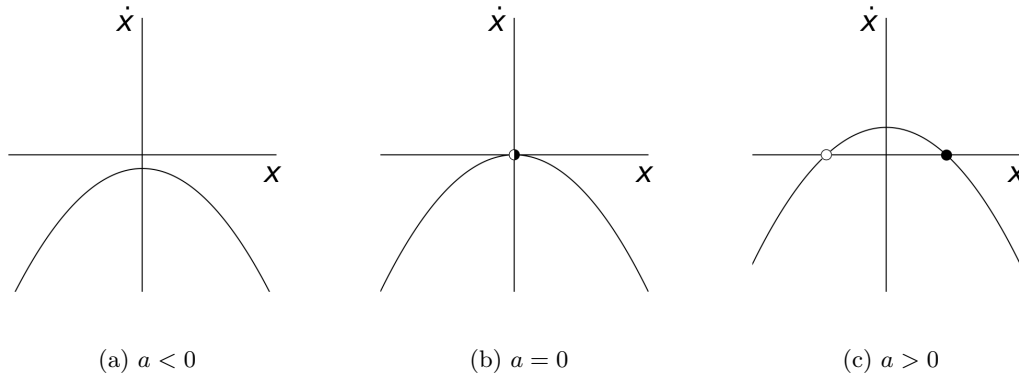


Figura 2.4: Sistema descrito en la ecuación (2.10). En  $a < 0$  no existen puntos fijos; en  $a > 0$  existe uno estable y otro inestable: en  $a = 0$  ha ocurrido una bifurcación silla-nodo.

Variando el valor de  $a$  podemos provocar un cambio drástico en el comportamiento del sistema. Siguiendo la figura 2.4, comencemos con el caso  $a = 0$ : la parábola no corta a  $\dot{x} = 0$  en ningún punto,  $\dot{x} < 0 \forall x$ . Cualquier punto colocado en la gráfica se desplaza hacia la izquierda. A medida que aumentamos  $a$  la parábola se acerca al eje horizontal, siendo tangente a él para  $a = 0$ . En este punto exacto tenemos un único punto fijo semiestable, la velocidad es negativa en todos los puntos salvo en  $x = 0$ . Si ahora aumentamos más  $a$  la parábola cortará a  $\dot{x} = 0$  en dos puntos: habrán aparecido dos puntos fijos, uno estable y el otro inestable.

Las bifurcaciones silla-nodo no son exclusivas de sistemas unidimensionales. La ecuación (2.10) puede referirse a una de varias componentes. Por ejemplo, podemos tener un sistema 2D de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a - x^2 \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned} \quad (2.11)$$

El comportamiento de  $x$  sigue siendo el de la figura 2.4. Respecto a la componente  $y$ , todas las trayectorias son atraídas hacia  $y = 0$ .



Lo que antes era un punto fijo estable pasa a ser un nodo estable, ya que es atractivo tanto en  $x$  como en  $y$ . El punto fijo inestable, por su parte, se convierte en una silla, ya que es repulsivo en  $x$  pero atractivo en  $y$ . De aquí el nombre de la bifurcación: pasamos de tener un sistema (o una región) sin puntos fijos a tener una silla y un nodo. La figura 2.5 muestra como varía la posición de los puntos fijos frente al parámetro  $a$ .

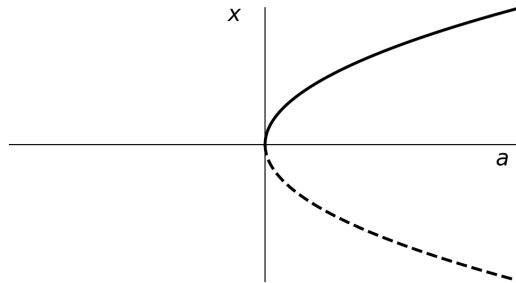


Figura 2.5: Posición de los puntos fijos frente al parámetro  $a$  en torno a una bifurcación silla-nodo. Se ha representado el punto fijo estable mediante una línea continua y la silla con una discontinua.

#### 2.4.2 Pitchfork (subcrítica)

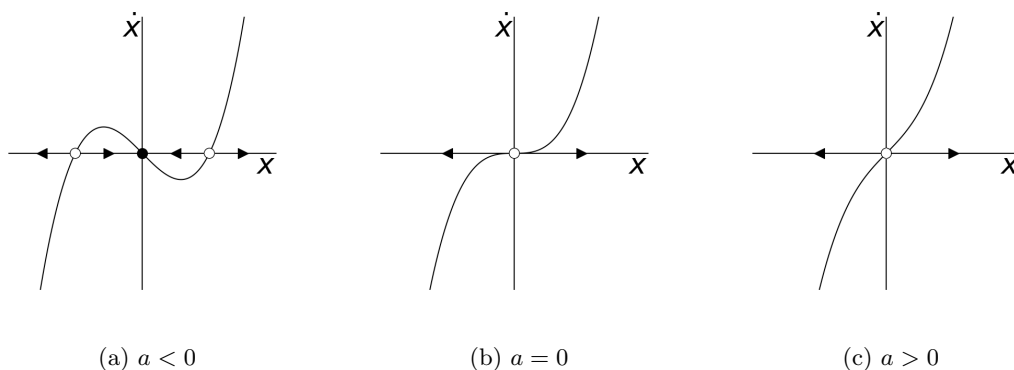


Figura 2.6: Bifurcación pitchfork subcrítica. Observamos como para  $a < 0$  existen un punto fijo estable central y dos puntos fijos inestables simétricos respecto al eje de ordenadas. Para  $a \geq 0$  tan solo existe el punto fijo central, ahora inestable.

Las bifurcaciones tipo *pitchfork* —tridente, horquilla— son comunes en problemas físicos con algún tipo de simetría[5]. En ellas los puntos fijos tienden a aparecer por parejas en posiciones relacionadas por la simetría del sistema. Existen dos tipos de bifurcaciones pitchfork: supercrítica y subcrítica, que representan la misma bifurcación pero con la estabilidad de sus puntos fijos cambiada. En este trabajo nos centraremos en la versión subcrítica, pero basta saber que para cambiar una pitchfork subcrítica por una supercrítica —o viceversa— tan solo hace falta invertir el sentido del tiempo  $t \rightarrow -t$ .

Imaginemos un sistema de la forma

$$\dot{x} = x(a + x^2). \quad (2.12)$$

Se han representado en la figura 2.6 las diferentes regiones del sistema.

Cuando el parámetro  $a$  es negativo, tenemos tres puntos fijos: uno central en  $x = 0$  (estable), y dos en  $\pm\sqrt{a}$  (inestables). A medida que  $a$  se acerca a 0 también lo hacen los dos puntos fijos inestables, hasta el momento en el que  $a = 0$ , en el que los puntos inestables y el estable se aniquilan formando un único punto inestable. En la figura 2.7 se pueden ver la dependencia de la posición de los puntos fijos con el parámetro  $a$ .

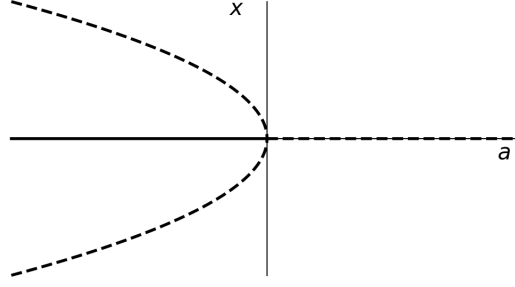


Figura 2.7: Posición de los puntos fijos frente al parámetro  $a$  en torno a una bifurcación pitchfork subcrítica. Se han representado los puntos fijos estables mediante una línea continua y los inestables con una discontinua.

### 2.4.3 Hopf (subcrítica)

Hemos hablado sobre las bifurcaciones silla-nodo y pitchfork, en las cuales puntos fijos aparecen y desaparecen cambiando un parámetro. A continuación hablaremos de las bifurcaciones de Hopf, en las cuales los puntos fijos cambian de estabilidad.

Imaginemos un sistema 2D con una Jacobiana  $\mathbf{A}$  2x2.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

entonces sus autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  vienen dados por

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Como todas las componentes de  $\mathbf{A}$  son reales, las soluciones solo pueden tener dos formas:  $\lambda_{1,2}$  son ambas reales ó  $\lambda_{1,2}$  son complejas conjugadas, con la misma componente real. Como está expuesto en la sección 2.2, un punto fijo será estable si todos los autovalores  $\lambda_i$  de su jacobiana  $\mathbf{A}$  tienen una parte real negativa, y son inestables si al menos un  $\lambda$  tiene una componente real positiva. Las bifurcaciones de Hopf ocurren cuando un autovalor de un punto fijo estable —con todas sus componentes reales negativas— atraviesa la recta  $\text{Re}(\lambda) = 0$ , pasando de ser negativo a positivo y convirtiendo el punto fijo en inestable.

Fijémonos en la figura 2.8. En el caso de (a), ambas componentes son reales y negativas, por lo que estamos tratando con un nodo estable. Sin embargo, a través de la jacobiana los autovalores  $\lambda_i$  dependen de los parámetros del sistema. Si variamos uno de estos parámetros, las  $\lambda_i$  cambiarán. Se dará una bifurcación si la parte real de uno de ellos llegara a 0. En este tipo de bifurcaciones tan solo hay un autovalor implicado. Son equivalentes a las que se pueden dar en sistemas unidimensionales, como las bifurcaciones silla-nodo o pitchfork.

Algo diferente ocurre con (b). En la figura se muestran dos autovalores conjugados, correspondiente a un foco estable. La peculiaridad de este tipo de puntos fijos es que, al ser complejos conjugados, los dos autovalores cambian de signo simultáneamente, convirtiéndose así en un foco inestable. Este tipo de transición, presentes únicamente en sistemas de dimensión igual o mayor a 2, es la denominada bifurcación de Hopf.

En una bifurcación de Hopf, un foco estable se convierte en un foco inestable, repeliendo a los agentes cercanos que se alejan de él formando una espiral. La estructura a la que se dirijan después depende del tipo de Hopf con el que estemos tratando.

De la misma forma que las pitchfork, una bifurcación de Hopf puede ser súper y subcrítica. En la supercrítica tenemos un foco atractor que se vuelve inestable al mismo tiempo que aparece un ciclo límite a su alrededor. Son bastante comunes: imaginemos el siguiente sistema, dado en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= ar - r^3 \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Notar que un punto fijo en  $r$  es un ciclo límite cuando representamos el sistema en coordenadas cartesianas.

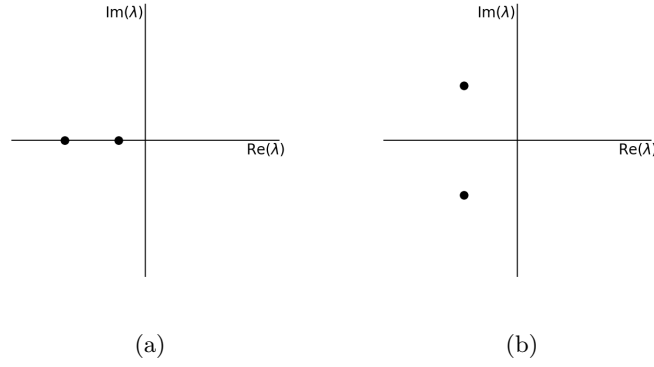


Figura 2.8: Los dos tipos de valores de los autovalores de  $\mathbf{A}$  en 2D: completamente reales (a) o complejos conjugados (b).

Considerando la ecuación para  $\dot{r}$ , si  $a$  es negativa, el único punto fijo de  $\dot{r}$  está en  $r = 0$ , y es estable: tenemos un foco atractor. Si en cambio  $a$  es positiva, este punto fijo pasa a ser inestable, y se forma un ciclo límite en  $r = \sqrt{a}$ . La versión supercrítica opera suavemente: cuando el punto fijo pierde su estabilidad, se forma un ciclo límite de radio  $\sqrt{a}$ , y a partir de ahí crece a medida que aumentamos  $a$ .

Como veremos, la versión que aparecerá posteriormente es la Hopf subcrítica. Consideremos el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= ar + r^3 \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2\end{aligned}\tag{2.14}$$

Si  $a$  es negativa y próxima a 0, existen dos puntos fijos en  $r$ :  $r = 0$ ,  $r = \sqrt{a}$ . El punto central es estable, por lo que el punto exterior es inestable (figura 2.10 (a)). Cuando  $a$  se hace positivo desaparece

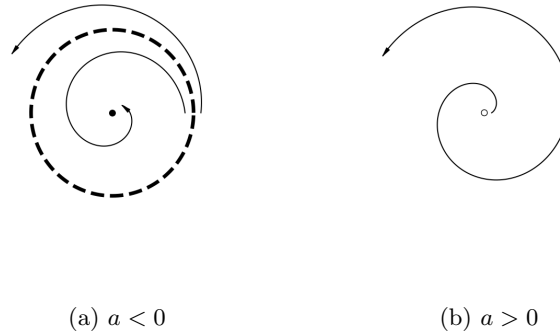


Figura 2.9: Sistema (ec. (2.14)) con una bifurcación Hopf subcrítica antes y después de pasar por  $a = 0$ .

el ciclo límite inestable que lo rodea desaparece con él. El sistema tiene ahora un punto fijo inestable en  $r = 0$ , del cual las órbitas se alejan trazando una espiral.

El principal cambio del Hopf subcrítico respecto al supercrítico es que posibilita la aparición de histéresis. Para una mejor visualización, añadamos un término estabilizador al sistema:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= ar + r^3 - r^5 \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2\end{aligned}\tag{2.15}$$

Como se ve en la figura 2.10, el sistema ahora una órbita estable exterior. Supongamos que tenemos un agente en el punto fijo central con  $a < 0$ . Aumentamos  $a$  hasta que es positiva, momento en el que el punto fijo central se vuelve inestable y nuestro agente salta hasta el ciclo límite estable. Si ahora tratamos de llevar a cabo el proceso inverso, reduciendo otra vez  $a$ , nos encontraremos que en  $a = 0$  el agente no vuelve al punto fijo central. Pese a que este es estable, actualmente se encuentra en el ciclo límite, que

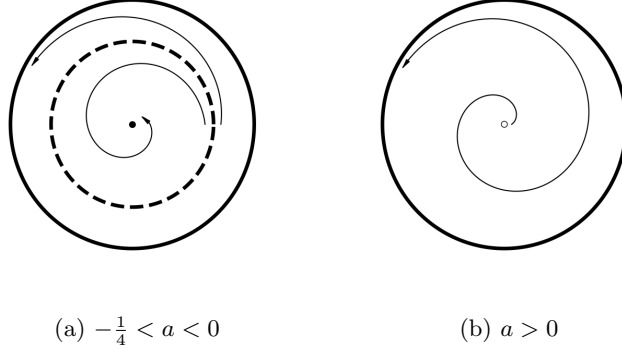


Figura 2.10: Sistema con una bifurcación Hopf subcrítica antes y después de pasar por  $a = 0$ .

también lo es. No será hasta que reduzcamos  $a = \frac{1}{4}$  que el ciclo límite estable se aniquilará con el inestable y el agente volverá a  $r = 0$ , aunque ese ya es otra bifurcación, una silla-nodo de ciclos.

#### 2.4.4 Silla-nodo de ciclos

Las bifurcaciones silla-nodo pueden afectar a ciclos límite de la misma forma que lo hacen con puntos fijos. Vamos a utilizar el mismo sistema que hemos utilizado para hablar sobre la bifurcación de Hopf subcrítica, la ecuación (2.15), ahora centrándonos en la bifurcación que ocurre en  $a_c = -\frac{1}{4}$ .

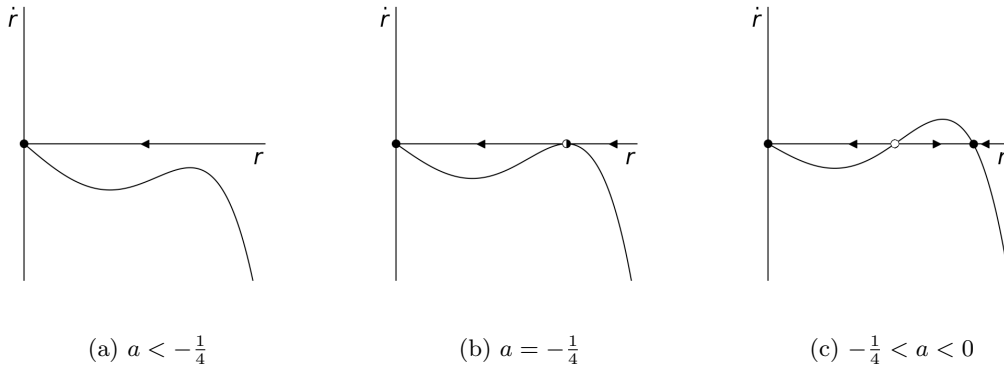


Figura 2.11: Silla-nodo de ciclos

En la figura 2.11 se puede ver la bifurcación que nos ocupa. Si en vez de  $r$  se tratara de una coordenada cartesiana, estaríamos estudiando una bifurcación silla-nodo normal. Sin embargo, al estar trabajando con una componente radial, cada punto fijo en las gráficas equivale a un ciclo límite.

Por lo demás, el proceso es idéntico a su versión con puntos fijos: al variar un parámetro dos ciclos límite, uno estable y el otro inestable, se aniquilan mutuamente; al variar el parámetro en el otro sentido esos dos ciclos límite aparecen de la nada.

#### 2.4.5 Pitchfork de ciclos

De forma análoga a la bifurcación silla-nodo la pitchfork puede ser entre ciclos. Para ello necesitamos dos ciclos límite inestables simétricos entre sí que colisionan simultáneamente un ciclo límite central.

#### 2.4.6 Bifurcación homoclínica

La bifurcación homoclínica es un fenómeno en el que un ciclo límite colisiona con un punto de silla. A medida que el ciclo límite se acerca a la silla, la zona del ciclo más próxima a esta se va ralentizando —ya que se está acercando a un punto fijo— hasta que la silla se sitúa sobre el ciclo límite, como está representado en la figura 2.12.

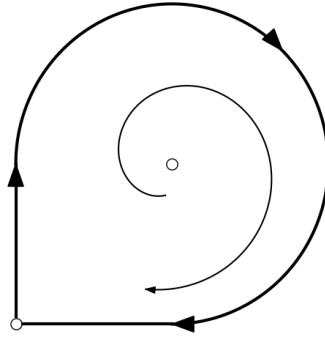


Figura 2.12: Órbita homoclínica. Dos brazos de la silla, uno atractivo y otro repulsivo, se conectan mediante el antiguo ciclo límite.

A medida que el ciclo límite y la silla se aproximan, la distancia entre las trayectorias y el punto fijo se reduce, lo que hace que la velocidad cerca de la silla se acerque cada vez más a 0. Como consecuencia, el periodo del ciclo límite va aumentando progresivamente. En el momento de la bifurcación, el ciclo límite colisiona con la silla como en la figura 2.12, lo que provoca que la velocidad se anule completamente y el periodo se haga infinito.

Vamos a ver como diverge el periodo  $T$  del ciclo límite. Para ello, distinguiremos dos zonas componentes del mismo:

$$T = T_{veloz} + T_{silla} \quad (2.16)$$

Cuando un agente está en la parte del ciclo límite alejada de la silla, se mueve (rápidamente) con una velocidad parecida a la que tenía antes. Representamos el tiempo que tarda en recorrer esta zona mediante  $T_{veloz}$ . El tiempo que pasa en el resto de la órbita, cuando está cerca de la silla, la llamamos  $T_{silla}$ .

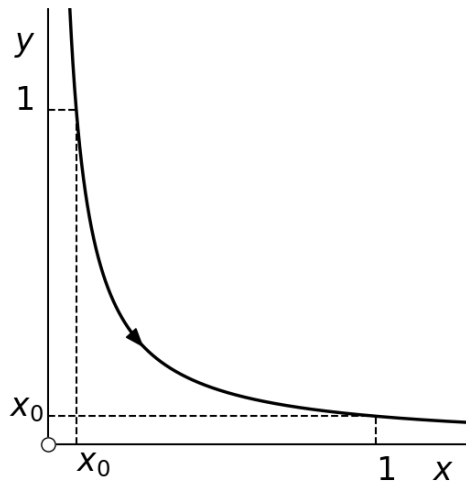


Figura 2.13: Esquema de un ciclo límite en la vecindad de un punto de silla.

Queremos saber el tiempo que tarda un agente en recorrer la trayectoria representada en la figura 2.13, la zona cercana a la silla. Para ello vamos a suponer que estamos muy cercanos a la bifurcación. Si

el parámetro que estamos modificando es  $\mu$  y la bifurcación ocurre en  $\mu_c$ , definimos un nuevo parámetro  $a = |\mu - \mu_c|$  y estudiamos su comportamiento cuando el ciclo se acerca a la silla,  $a \rightarrow 0$ .

Al encontrarnos cerca de la bifurcación, el ciclo límite pasa realmente cerca de los autovectores de la silla, a una distancia del orden de  $a$ ,  $x_0 \propto a$ , mientras que está a una distancia del tamaño del orden del ciclo,  $\sim 1$ , respecto al otro autovector de la silla, como está representado en 2.13.

La dinámica de la silla domina en el área cercana a ella. Por simplicidad, en la figura 2.13 se ha representado un caso con los autovectores de la silla en  $x$  e  $y$ , siendo el autovalor de  $x$  positivo y el de  $y$  negativo. Si partimos de la posición  $x = x_0$ , la dinámica en el eje  $x$  vendrá dada por:

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t}$$

La zona cercana a la silla comienza cuando  $t = 0$  y  $x = x_0$ , y termina cuando  $t = T_{silla}$  y  $x = 1$ . Por tanto  $1 = x_0 e^{\lambda T_{silla}}$  y

$$T \sim T_{silla} = -\frac{1}{\lambda} \ln x_0 \propto -\frac{1}{\lambda} \ln a \quad (2.17)$$

Nuestra forma de identificar una bifurcación homoclínica será medir periodos para diferentes valores de  $a$ . Si para un  $a$  suficientemente pequeño  $T$  frente a  $\ln a$  se ajusta a una recta (de pendiente  $-\lambda^{-1}$ ), en nuestro sistema estará presente una bifurcación análoga a la homoclínica.

## 2.5 Codimensión

De forma coloquial, la codimensión es el número de parámetros que hace falta ajustar para observar una bifurcación. En este capítulo tan solo se han estudiado sistemas 1 ó 2-dimensionales. Esto se debe a que en  $d = 2$  ya aparecen (casi) todas las transiciones posibles de codimensión 1. Equivalentemente, todas las transiciones que se pueden dar modificando un solo parámetro.

Para visualizar esto mejor, imaginemos un sistema 4D con un punto fijo de 4  $\lambda$ s distintas, representadas como en la figura 2.8. Si variamos un único parámetro, tan solo un autovalor alcanzará  $\text{Re}(\lambda) = 0$  en cada bifurcación —dos si  $\lambda$  tiene un autovalor conjugado. Las bifurcaciones de codimensión 2 (y mayor) existen, pero son casos en los que dos parámetros han de modificarse simultáneamente para que crucen  $\text{Re}(\lambda) = 0$  al mismo tiempo.

# Capítulo 3

## Resultados

En este capítulo se discutirán los resultados obtenidos del estudio del modelo de Kuramoto generalizado en  $D = 3$  con  $N = 2$  agentes. Como se ha mencionado al final del capítulo de introducción, el área estudiada es bastante específica: dos agentes con el mismo módulo de  $|\omega|$ .

Las simulaciones han sido realizadas mediante la integración numérica del sistema con 6 variables (en coordenadas cartesianas). Para ello se ha hecho uso del método Runge-Kutta de 4º orden, comprobando periódicamente que  $|\sigma_i| = 1$ . Para ver una selección del código más importante escrito para las simulaciones está en el apéndice A.

### 3.1 Sistema de referencia

#### 3.1.1 Sistema de coordenadas

Pese a haber aumentado el modelo de Kuramoto en una única dimensión, la cantidad de variables es abrumante: expresado en coordenadas cartesianas necesitamos tres coordenadas por agente, además de otros tres parámetros (por agente también) necesarios para definir los vectores  $\omega_i$ .

Un cambio posible sería traducir el sistema a coordenadas esféricas. De esta forma pasaríamos de tener 3 ecuaciones por agente a tener 2, pues  $|\sigma_i| = 1$ ). Sin embargo, es más sencillo y rápido escribir código en coordenadas cartesianas.

Queriendo mantener las coordenadas cartesianas, necesitábamos un sistema de referencia que facilitara el análisis de los resultados. Habíamos conseguido evidencia de que el ángulo entre los vectores  $\omega_i$ , que denominaremos como  $\theta_\omega$ , era determinante para el tipo de solución que mostraba el sistema. Por otra parte, el vector parámetro de orden  $\rho$  giraba en muchas soluciones en torno a  $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ .

Con estos dos indicios en mente, fijamos nuestro sistema de referencia a los  $\omega_i$ : situamos a ambos en el plano  $x = 0$ , a un ángulo  $\pm\frac{1}{2}\theta_\omega$  del eje  $z$ , como aparece en la figura 3.1.

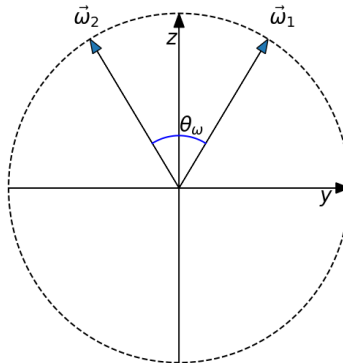


Figura 3.1: Sistema de referencia utilizado en las simulaciones.

En este sistema de referencia  $\theta_\omega \in [0, \pi]$ . Cuando los vectores  $\omega_i$  se encuentran por debajo del ecuador,  $\theta_\omega > \pi$ , el sistema de referencia puede cambiarse de forma que realmente nos encontremos en el caso con  $\theta'_\omega = 2\pi - \theta_\omega$ .

### 3.1.2 $K$ vs. $|\omega|$

Como hemos mencionado en la introducción a este capítulo, siempre hemos llevado a cabo las simulaciones utilizando  $|\omega_1| = |\omega_2|$ . Veamos por qué tomar  $|\omega_{1,2}| = 1$  no afecta a la generalidad de las soluciones encontradas. Recordemos la ecuación que rige nuestro sistema, (1.14)

$$\frac{d\sigma_i}{dt} = K [\rho - (\rho \cdot \sigma_i) \sigma_i] + \omega_i \times \sigma_i$$

Escribamos  $\omega_i$  como un vector unitario multiplicado por su módulo,  $\omega_i = \omega_i \hat{\omega}_i$ . Ahora, dividamos toda la ecuación (1.14) por el módulo de  $\omega_i$ :

$$\omega_i^{-1} \frac{d\sigma_i}{dt} = \omega_i^{-1} K [\rho - (\rho \cdot \sigma_i) \sigma_i] + \hat{\omega}_i \times \sigma_i \quad (3.1)$$

Acabamos de hacer que el módulo de  $\omega_i$  sea 1, veamos qué ha cambiado: por una parte, el término del lado izquierdo de la ecuación está multiplicado por una constante. Esto hace que la evolución del sistema sea más rápida o más lenta, pero no cambiará las trayectorias. Esto se debe a las propiedades de los sistemas continuos autónomos (expuestos en la sección 2.1).

Por otra parte,  $K$  ahora está dividido por el módulo de  $\omega$ . Como vamos a variar  $K$  a nuestro antojo, simplemente lo podemos renombrar por  $K' = \omega_i^{-1} K$ . Como  $\omega_i$  es siempre positivo y real, al variar  $K'$  de 0 a infinito también estamos variando  $K$  en este rango, viendo todas las posibles soluciones del sistema.

Resumiendo: en un sistema de dos  $\omega$  del mismo módulo, el parámetro que determina el tipo de solución no son  $\omega$  ni  $K$  por separado sino  $K' = \omega_i^{-1} K$ .

Notar que para que esto funcione se tiene que cumplir que  $|\omega_1| = |\omega_2|$ , ya que si no las constantes  $K$  de los agentes serían distintas. Que los módulos sean iguales sí supone una pérdida de generalidad, que sean exactamente 1, no.

## 3.2 Propiedades generales

A continuación describiremos una serie de propiedades del sistema.

### 3.2.1 Desarrollo de las ecuaciones

Situándonos en el caso de dos osciladores podemos desarrollar la ecuación (1.14). Para ello sustituimos  $\rho = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2)$  para el vector  $\sigma_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_1}{dt} &= K [\rho - (\rho \cdot \sigma_1) \sigma_1] + \omega_1 \times \sigma_1 \\ &= K \left[ \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) - \left( \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \cdot \sigma_1 \right) \sigma_1 \right] + \omega_1 \times \sigma_1 \\ &= \frac{1}{2} K [\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_1 - (\sigma_2 \cdot \sigma_1) \sigma_1] + \omega_1 \times \sigma_1 \\ &= \frac{1}{2} K [\sigma_2 - (\sigma_2 \cdot \sigma_1) \sigma_1] + \omega_1 \times \sigma_1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Aplicando el mismo procedimiento con el vector  $\sigma_2$ :

$$\frac{d\sigma_2}{dt} = \frac{1}{2} K [\sigma_1 - (\sigma_1 \cdot \sigma_2) \sigma_2] + \omega_2 \times \sigma_2 \quad (3.3)$$

Hemos desarrollado el sumatorio de  $\rho$  porque tan solo estamos trabajando con dos agentes: de trabajar con 3 o más este cambio tan solo haría más intangibles las ecuaciones.



### 3.2.2 Sistema desacoplado

El caso desacoplado,  $K = 0$ , es singular por lo degenerado que está. Sin embargo, como comprobaremos más adelante, la dinámica desacoplada da indicios de algunos comportamientos que veremos más tarde.

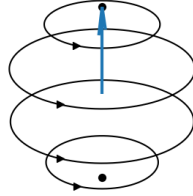


Figura 3.2: Sistema desacoplado. El vector  $\omega_i$  está representado en azul y las trayectorias y puntos fijos en negro. Notar que no se trata de ciclos límite ya que no están aisladas. Las infinitas trayectorias de  $\sigma_i$  que giran en torno al  $\omega_i$  correspondiente son neutralmente estables.

Tomemos la ecuación (1.14) y hagamos  $K = 0$ . El resultado es:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_1}{dt} &= \omega_1 \times \sigma_1 \\ \frac{d\sigma_2}{dt} &= \omega_2 \times \sigma_2\end{aligned}\tag{3.4}$$

El término de  $K$  es el que controla la interacción entre los agentes, por lo que al eliminarlo nos quedamos con dos ecuaciones independientes. Los agentes  $\sigma_i$  rotan en torno al vector  $\omega_i$  correspondiente, y todas las órbitas son cerradas. Todas las —infinitas— órbitas perpendiculares a  $\omega_i$  son neutralmente estables y están determinadas por la posición original de los agentes.

Los únicos puntos fijos en el sistema desacoplado son  $\sigma_i^* = \pm\omega_i$ . Para el sistema desacoplado estos puntos fijos son triviales, pero como veremos adelante, al utilizar una constante de acoplamiento  $K > 0$  estos puntos se mantendrán, algo modificados, eso sí.

Por último, del sistema desacoplado podemos aprender el orden de magnitud de las soluciones periódicas. Como en la versión desacoplada del sistema (ec.(3.4)) solo está presente el término de  $\omega_i$  es automático que todas las soluciones periódicas —todas menos los puntos fijos— tienen un periodo  $T = 2\pi|\omega_i|^{-1} = 2\pi$ .

## 3.3 Simetrías

El alto número de ecuaciones dependientes dificulta el trabajo analítico con ellas. No obstante, el sistema tiene bastantes simetrías que pueden orientarnos a la hora de realizar las simulaciones. Las simetrías aquí descritas son las propias del sistema estudiado (dos agentes,  $\omega_1 = \omega_2 = 1$ ,  $D = 3$ ), por lo que son más sencillas de observar en las ecuaciones (3.2) y (3.3) que en (1.14).

### 3.3.1 Simetrías del modelo

$$\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$$

Por cada solución que encontremos existe una gemela con el signo opuesto de los  $\sigma_i$ .

### 3.3.2 Simetrías del modelo con $N = 2$

$$K \rightarrow -K, \sigma_1 \rightarrow -\sigma_1; \quad K \rightarrow -K, \sigma_2 \rightarrow -\sigma_2$$

Esta es una propiedad única del sistema  $N = 2$ : cambiar  $K$  por el mismo valor en negativo es equivalente a sustituir uno de los dos vectores  $\sigma_i$  por  $-\sigma_i$  (solo 1 vector). Esta simetría simplifica tremendamente el estudio de la zona de repulsión,  $K < 0$ , como veremos en la sección 3.5.3.

## 3.4 Atractores para $K > 0$

Dos tipos de atractor surgen del sistema, claramente diferenciadas. Para valores de  $\theta_\omega$  no muy altos, encontramos siempre soluciones *periódicas*, ciclos límite. Para valores cercanos a  $\pi$  —salvo cuando  $K \rightarrow 0$ — siempre encontramos una solución *fija*, un punto fijo. Además, para valores intermedios de  $\theta_\omega$  y valores bajos de  $K$  existe una zona de biestabilidad, donde existen tanto puntos fijos como ciclos límite.

En este apartado describiremos las características comunes de las soluciones.

### 3.4.1 Solución periódica

El sistema desacoplado es un caso degenerado en el que cada  $\sigma$  tiene infinitas órbitas cerradas en torno a su  $\omega$ . En el momento en el que “conectamos” el acoplamiento,  $K > 0$ , las órbitas de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  sincronizan su componente azimutal, de la misma forma que pasaría en el modelo de Kuramoto si hubiera dos únicos vectores con el mismo valor de  $\omega$  (figura 3.3). Esto quiere decir que tras un tiempo de estabilización se llega a un atractor ciclo límite del sistema.

Además, se observa que para todo  $K > 0$ , los ciclos de ambos  $\sigma$  están relacionados entre sí por una simetría especular en el plano  $z = 0$ . Esto hace que en cualquier estado estabilizado del sistema  $\rho_z = 0$ .

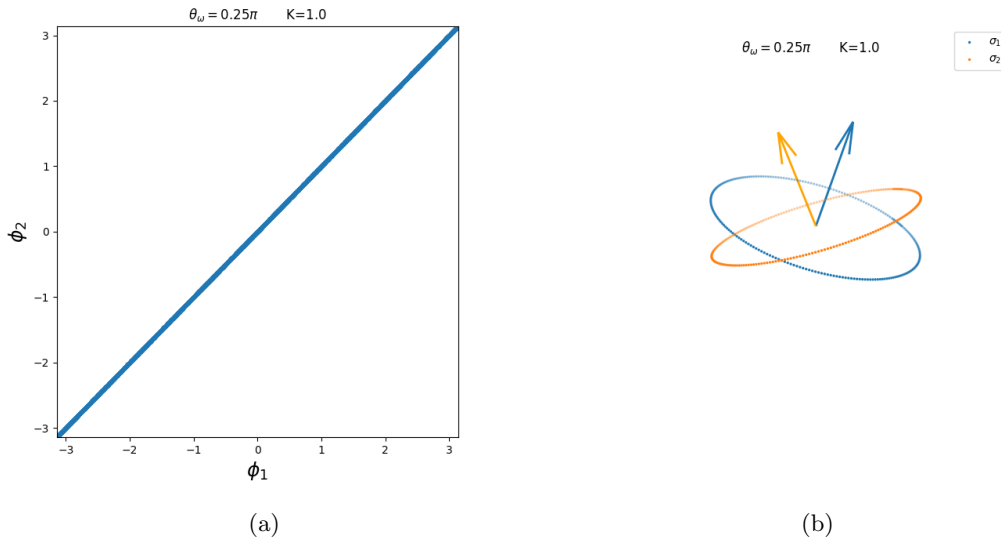


Figura 3.3: En (a), la componente azimutal de  $\sigma_2$  frente a la componente azimutal del  $\sigma_1$  en un sistema estabilizado. En (b), ejemplo de ciclos límite. Debido a la simetría especular de las órbitas se cortan siempre en  $z = 0$ .

Si hacemos  $K$  ligeramente positivo, todas las trayectorias del sistema desacoplado desaparecen con la excepción del círculo máximo, surgiendo ciclos límite como el de la figura 3.3. En estas órbitas, los agentes consiguen estar constantemente a una distancia pequeña: teniendo en cuenta que las trayectorias de los  $\sigma_i$  se mueven perpendiculares a sus  $\omega_i$  y que rotan sincronizadamente, podemos afirmar que  $|\sigma_1 - \sigma_2| \leq 2 \sin(\frac{1}{2}\theta_\omega)$  y que  $|\rho| \geq \cos(\frac{1}{2}\theta_\omega)$ . Se obtiene por tanto un estado coherente siempre que  $K > 0$ .

Salvo en el área cercana más cercana a  $K = 0$  este ciclo límite desaparece al llegar a determinado valor de  $\theta_\omega$  —cómo lo hace depende del valor de  $K$ , y está desarrollado en las secciones 3.5.1 y 3.5.2. Pongámonos en casos extremos: si  $\theta_\omega = 0$ , ambos agentes giran en torno al eje  $z$  perfectamente sincronizados,  $|\rho| = 1$  en todo momento. Cuando  $\theta_\omega = \pi$ ,  $\omega_1 = \omega_2$ . En el caso desacoplado, cada agente gira en torno a su  $\omega$ ,

formando las mismas órbitas pero en sentidos opuestos, como un par de Cooper. En este estado,  $|\rho|$  varía de 0, cuando los agentes apuntan en direcciones contrarias, hasta 1, cuando los agentes se cruzan. Al salir del estado acoplado, sin embargo, este ciclo no existe, y las soluciones del sistema son puntos fijos.

A medida que aumentamos  $K$ , los agentes comienzan a atraerse más, *aplanando* los ciclos límite, haciendo que giren cada vez más en torno al eje  $z$ . De está forma, la estabilidad del ciclo límite se mantiene hasta valores más altos de  $\theta_\omega$ .

### 3.4.2 Puntos fijos

En el sistema desacoplado se presentan dos puntos fijos para cada oscilador en  $\sigma_i = \pm\omega_i$ . Consideramos los siguientes tipos de solución: llamaremos  $\Sigma_{++}$  al estado  $(\sigma_1, \sigma_2) = (+\omega_1, +\omega_2)$  y  $\Sigma_{+-}$  al estado  $(\sigma_1, \sigma_2) = (+\omega_1, -\omega_2)$ . Estos estados tienen cada uno un estado gemelo,  $\Sigma_{--}$  y  $\Sigma_{-+}$ , relacionados entre sí por la simetría  $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$ .

Cuando tomamos un  $K$  pequeño y positivo, estos puntos se mantienen, pero ligeramente desplazados. Imaginemos que nos encontramos en el sistema desacoplado e introducimos un  $K = \delta K$  pequeño. Queremos encontrar un punto fijo, por lo que buscamos soluciones en las que  $\dot{\sigma}_i = 0$ . Suponemos además que las soluciones no dan un salto discontinuo, sino que pasan de ser  $\sigma_i = \pm\omega_i$  a ser  $\sigma_i = \pm\omega_i + \delta\sigma_i$ . Para describir el sistema seguiremos utilizando la notación de  $\Sigma$  para referirnos a los puntos fijos cercanos a los presentes en el sistema desacoplado. Consideremos la solución cercana a  $\Sigma_{+-}$  e incluyamos estas suposiciones en la ec. (3.2):

$$0 \approx \frac{\delta K}{2} [\omega_1 + \delta\sigma_1 + \{(\omega_1 + \delta\sigma_1) \cdot (-\omega_2 + \delta\sigma_2)\} - \omega_2] + \omega_1 \times (\omega_1 + \delta\sigma_1)$$

Desarrollamos despreciando los términos de orden  $(\delta K)^2$ ,  $(\delta\sigma)^2$ ,  $\delta K \cdot \delta\sigma$  y mayor:

$$\begin{aligned} 0 &\approx \frac{\delta K}{2} [\omega_1 + \delta\sigma_1 + \{-\omega_1 \cdot \omega_2 + \omega_1 \delta\sigma_2 - \omega_2 \delta\sigma_1\} \omega_2] + \omega_1 \times \delta\sigma_1 \\ &\approx \frac{\delta K}{2} [\omega_1 - \omega_2 \cos \theta_\omega] + \omega_1 \times \delta\sigma_1 \end{aligned}$$

Multiplicamos vectorialmente por  $\omega_1$  por la izquierda:

$$\begin{aligned} 0 &\approx \frac{\delta K}{2} [\omega_1 \times \omega_1 - \omega_1 \times \omega_2 \cos \theta_\omega] + \omega_1 \times (\omega_1 \times \delta\sigma_1) \\ &= -\frac{\delta K}{2} [\sin \theta_\omega \cos \theta_\omega \hat{x}] + \omega_1 (\omega_1 \cdot \delta\sigma_1) - \delta\sigma_1 (\omega_1 \cdot \omega_1) \\ &\approx -\frac{\delta K}{4} [\sin 2\theta_\omega \hat{x}] - \delta\sigma_1 \end{aligned}$$

En la última igualdad se ha utilizado la propiedad de que, como este  $\delta\sigma_i$  es pequeño y estamos en una esfera, será perpendicular a  $\omega_i$ . Donde  $\hat{x}$  es el vector unitario en la dirección  $x$ . Por tanto,

$$\delta\sigma_1 \approx -\frac{\delta K}{4} \sin 2\theta_\omega \hat{x}. \quad (3.5)$$

Los puntos fijos se desplazan perpendiculares al plano de los  $\omega$  para compensar el acoplamiento  $\delta K$  que acaba de aparecer.

No todas las soluciones  $\Sigma$  son puntos fijos estables. Imaginemos un sistema con  $\theta_\omega$  cercano a  $\pi$  —donde encontramos en la práctica los puntos fijos. La combinación de puntos estables  $\sigma_1 \approx \omega_1$ ,  $\sigma_2 \approx \omega_2$  hace que ambos agentes estén separados por una gran distancia. Sin embargo, las combinaciones  $\sigma_1 \approx \omega_1$ ,  $\sigma_2 \approx -\omega_2$  y  $\sigma_1 \approx -\omega_1$ ,  $\sigma_2 \approx \omega_2$  se encuentran cercanas, a una distancia angular de  $\pi - \theta_\omega$ . El término atractivo  $K$  actuará, por tanto, como desestabilizante en las primeras y como estabilizante en las segundas, haciendo que las soluciones  $\Sigma_{+-}$  y  $\Sigma_{-+}$  sean estables mientras que inestabiliza a  $\Sigma_{++}\Sigma_{--}$ .

Para valores de  $K$  altos ocurre un efecto curioso: para valores de  $\theta_\omega$  cercanos a  $\pi$ , los ciclos límite siguen existiendo, moviéndose cerca del ecuador —como hemos visto en la sección anterior,  $K$  *aplan*a los ciclos límite. Como los puntos fijos se mantienen próximos a  $\pm\omega_i$ , puntos fijos y ciclos límite pueden acabar colisionando, como veremos en la sección 3.5.2.

### 3.4.3 Biestabilidad

Para valores bajos de  $K$ , existen rangos amplios de biestabilidad: zonas en las que coexisten el ciclo límite con los puntos fijos —los gemelos  $\Sigma_{\pm\mp}$ .

### 3.5 Transiciones entre soluciones

Para estudiar la estabilidad de las distintas soluciones utilizaremos la técnica de la continuación: primero dejamos evolucionar al sistema, hasta que los agentes sean atraídos por atractor (punto fijo o ciclo límite). Manteniendo las posiciones de los agentes, modificamos ligeramente el sistema, aumentando  $\theta_\omega$  en nuestro caso. Volvemos a dejar evolucionar al sistema y repetimos. De esta forma los agentes estarán siempre cerca del mismo punto fijo o ciclo límite, y serán atraídos por él. Si entre simulación y simulación cambian de tipo de solución —pasan de ser periódicos a fijos o viceversa—, será porque el estado anterior se ha vuelto inestable o ha sido aniquilado.

En la figura 3.4 se pueden ver dónde ocurren las transiciones, i.e. donde los puntos fijos o los ciclos límite pierden su estabilidad o desaparecen. En las subsiguientes secciones aparecen descritas las transiciones de las zonas específicas.

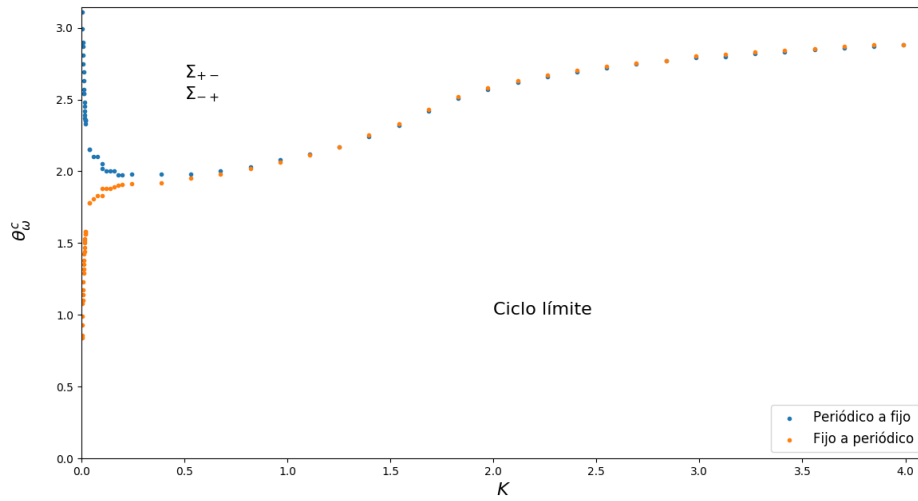
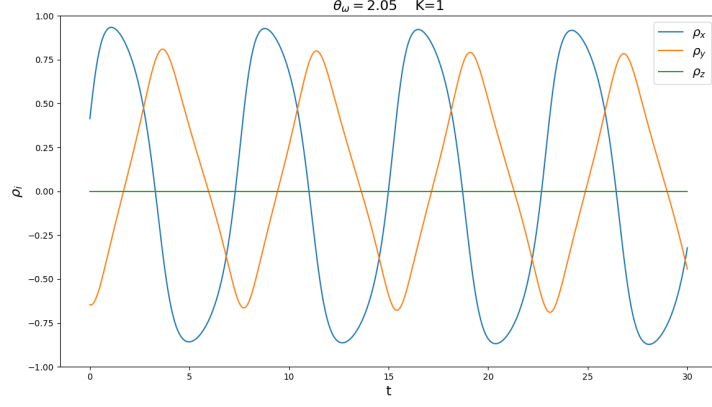


Figura 3.4: Diagrama de fases para  $K > 0$ .

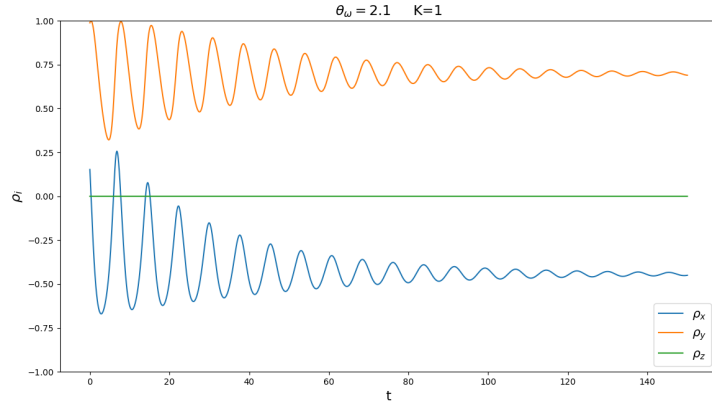
#### 3.5.1 K bajo

Veamos como ocurren las transiciones entre las soluciones fijas y estables cuando  $K < 2$ . Situémonos en  $\theta_\omega \sim \frac{1}{4}\pi$ . Las simulaciones que hacemos devuelven siempre una solución periódica, aproximadamente sinusoidal y con periodo  $T \approx 2\pi$ . Se prueban varias condiciones iniciales para los vectores  $\sigma$ , pero ninguna llega a una solución fija, por lo que concluimos que no hay puntos fijos estables en esta zona.

Aumentamos progresivamente  $\theta_\omega$ . Los ciclos límite se separan cada vez más, hasta que, en un incremento de  $\theta_\omega$ , la solución pasa de ser periódica a ser fija. Las gráficas antes y después de esta transición están representadas en la figura 3.5. Volveremos a la desaparición del atractor periódico más adelante en esta sección.



(a)



(b)

Figura 3.5: En (a) estado oscilatorio normal. La componente  $z$  de  $\boldsymbol{\rho}$  se hace 0 por la simetría de los ciclos límite respecto al plano  $xy$ . Las componentes  $x$  e  $y$  ya no son sinusoidales, pero su periodo sigue siendo del orden de  $T \sim 2\pi\omega^{-1} \sim 6$  unidades de tiempo. En (b) el mismo sistema pero con  $\theta_\omega$  0.05 radianes mayor. El ciclo límite ha dejado de ser estable y, tras un tiempo de estabilización, se va al punto fijo.

Llevemos a cabo el proceso inverso: partamos de una solución fija ( $\theta_\omega \sim \pi$ ) y reduzcamos  $\theta_\omega$  hasta que ya no encontremos una solución fija. El antes y después de esta transición se puede ver en la figura 3.6. Observamos que, cuando la solución fija desaparece, el agente se aleja en espiral. Sabemos que se trata de una bifurcación Hopf porque un punto que era estable se ha convertido en un foco inestable. Además, como se ve en la figura, cuando se produce la bifurcación el agente se aleja hasta otro ciclo límite, no uno recién surgido en la cercanía del punto fijo. Como se describió en la sección 2.4.3, esto corresponde a una bifurcación Hopf subcrítica.

Algo muy significativo que está ocurriendo es que para un mismo  $K$  la solución fija desaparece a un  $\theta_\omega$  más bajo que el  $\theta_\omega$  en el que lo hace la solución periódica. Este proceso de histéresis indica que hay una zona de biestabilidad en el que puntos fijos y ciclos límite existen a la vez. Entre dos estructuras atractivas, al estar en un sistema dinámico continuo, tiene que haber una estructura repulsiva, por lo que, entre un punto fijo y un ciclo límite estable ha de haber un ciclo límite inestable.

Sabiendo esto, volvamos a la transición en la que el ciclo límite estable desaparece. Pensemos en uno de los  $\boldsymbol{\sigma}$  en la zona biestable. Tenemos dos puntos fijos en  $\boldsymbol{\sigma} \sim \pm\boldsymbol{\omega}$  y un ciclo límite estable entre ambos. Entre el ciclo límite y cada uno de los dos puntos fijos, por lo que acabamos de decir, debe haber un ciclo límite inestable.

Ahora pensemos en el momento en que justo el ciclo límite estable deja de existir: tenemos todavía los puntos fijos, pero entre ellos ya no hay soluciones estables. Sin embargo, por la misma razón por la que tenía que haber un ciclo límite inestable entre el ciclo límite estable y el punto fijo, debe haber un ciclo límite inestable entre los dos puntos fijos.

Resumiendo: pasamos de tener un ciclo límite estable rodeado por dos ciclos límite inestables a

tener un único ciclo límite inestable. Se tiene que tratar por tanto de una bifurcación pitchfork subcrítica de ciclos.

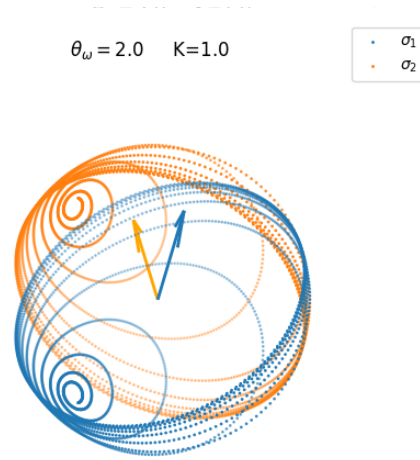


Figura 3.6: Simulación del sistema con un valor de  $\theta_\omega$  ligeramente menor al de la bifurcación de Hopf. Se ha inicializado el sistema sobre el antiguo punto fijo estable y se ha dejado evolucionar el sistema, representando esta vez también el estado transitorio. La trayectoria parte de un punto cercano al punto fijo y se aleja de él formando una espiral, indicativo de la bifurcación Hopf.

$K \rightarrow 0$

Es interesante ver cómo se unen el estado desacoplado y el resto del sistema. En la figura 3.7 podemos ver cómo se comportan los puntos de bifurcación cuando la constante de acoplamiento es muy pequeña.

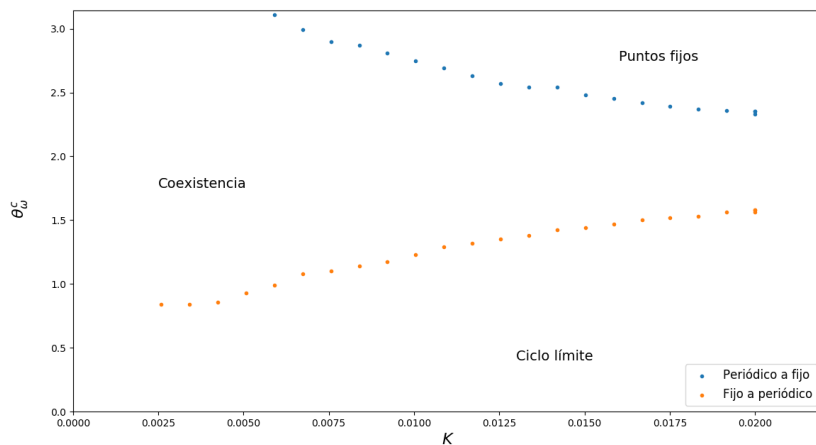


Figura 3.7: Comportamiento de los puntos de bifurcación cuando  $K \rightarrow 0$ . Se aprecia como la rama de la transición de periódico a fijo corta a  $\theta_\omega = \pi$ , mientras que las soluciones fijas comienzan a perder estabilidad en torno a  $\theta_\omega \sim 0,8$ .

### 3.5.2 K alto

Para estudiar el sistema con una constante de acoplamiento alta  $K > 2$  llevamos a cabo la misma técnica de continuación que utilizamos con la constante de acoplamiento baja. Aparecen dos cambios significativos respecto a esta zona: por una parte, los valores de  $\theta_\omega$  en los que el ciclo límite y el punto fijo pierden la estabilidad se juntan cada vez más, reduciendo el área de biestabilidad. Por otra parte, cuando nos acercamos desde la zona de soluciones periódicas a la transición, el periodo diverge (figura 3.8).

Para comprobar el tipo de bifurcación que estamos viendo, observamos cómo diverge el periodo  $T$ . Solo hay dos posibles escenarios (pg. 264[5]: que diverja como una bifurcación SNIPER, en la que  $T \propto a^{-1/2}$ , o que lo haga como una bifurcación homoclínica, en la que  $T \propto -\ln a$ .

En la figura 3.9 se ve cómo cuando  $\theta_\omega \rightarrow \theta_\omega^H$   $T$  vs.  $\ln a$  forma una línea recta, como se espera para una bifurcación homoclínica. Para ser precisos, se trata de una bifurcación heteroclínica: en la sección 2.4.6 hemos visto como un ciclo homoclínico “sale” de un brazo de un punto de silla y “entra” por el otro brazo del mismo punto.

En el caso heteroclínico, presente en sistemas con simetrías, el ciclo colisiona con dos puntos de silla simultáneamente. Del brazo inestable de una va al ciclo estable de la otra y así sucesivamente. Diverge de forma idéntica a la homoclínica con la excepción de que aparece un factor 2,  $T \sim 2T_{silla} = -\frac{2}{\lambda} \ln a$ , debido a que ahora hay dos zonas lentas, como se puede comprobar en la figura 3.8.

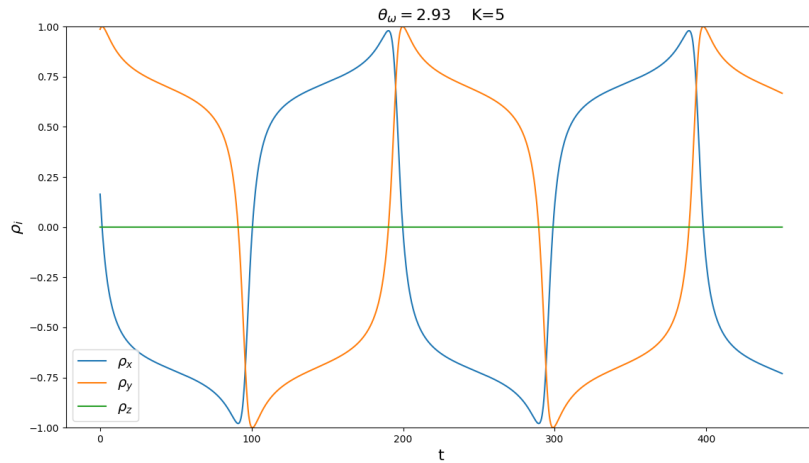


Figura 3.8: Simulación del sistema muy cerca de la bifurcación heteroclínica. El periodo ha comenzado a divergir, pasando de  $T \sim 6$  a  $T \sim 200$ . Cada semiperiodo de la función se divide en dos zonas: una de evolución rápida, donde pasa del máximo/mínimo muy verticalmente, seguida por una zona de evolución lenta hasta llegar al siguiente mínimo/máximo. Esta última constituye la mayoría del tiempo del periodo.

Veamos qué ocurre cuando pasamos de un estado fijo estable a uno inestable. Para  $\theta_\omega > \theta_\omega^H$ , el ciclo límite ha colapsado y sabemos que existen dos puntos fijos inestables —las sillas que han actuado en la bifurcación heteroclínica— y dos puntos fijos estables que observamos como solución del sistema. Al pasar de  $\theta_\omega > \theta_\omega^{SN}$  a  $\theta_\omega < \theta_\omega^{SN}$  —donde  $\theta_\omega^{SN}$  es el punto de bifurcación— desaparecen todos los puntos fijos estables, ya que solo encontramos soluciones periódicas.

Por otra parte, la figura 2.17 nos da más información: vemos que —como estimación— el autovalor inestable asociado a la silla es  $\lambda \sim 1/32$ , bastante pequeño.

Veamos el ejemplo de Silla-Nodo de la ec. (2.10). El autovalor del punto inestable en  $x^* = -\sqrt{a}$  viene dada por

$$\lambda = \left( \frac{df}{dx} \right)_{x^*} = (-2x)_{x^*} = 2\sqrt{a}$$

Las constantes de Lyapunov de los puntos fijos tienden a 0 cuando el punto está a punto de desaparecer ( $a=0$ ), por lo que no es sorprendente que  $\theta_\omega^{SN} \approx \theta_\omega^H$ .

Resumiendo: tenemos dos pares de puntos fijos, dos sillas y dos nodos, relacionados entre sí por simetría. La silla está próxima a su desaparición, y el punto fijo también desaparecerá o perderá su estabilidad en un  $\theta_\omega$  cercano. Todo apunta a una bifurcación silla-nodo, en la que las dos parejas silla-nodo se aniquilan, simultáneamente debido a la simetría.

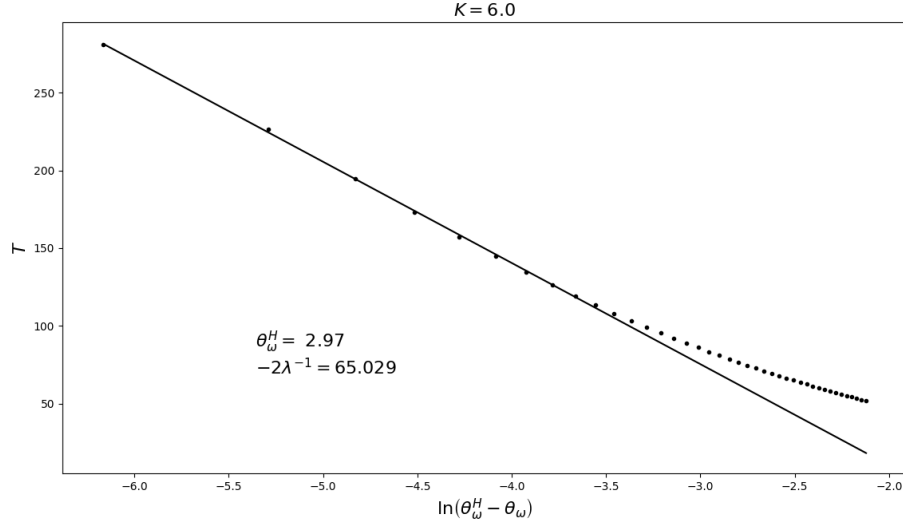


Figura 3.9: Ajuste lineal entre  $T$  y  $\ln(\theta_{\omega}^H - \theta_{\omega})$ . Los puntos más cercanos a  $\theta_{\omega}^H$  se ajustan a una recta, lo que confirma una bifurcación de tipo heteroclínica/homoclínica.

### 3.5.3 K negativo

Como se indicó en la sección sobre las simetrías del sistema, el sistema es invariante al cambio de  $\sigma_1 \rightarrow -\sigma_1$ ,  $K \rightarrow -K$ . Esto quiere decir que si utilizamos una constante de acople negativa, el sistema reaccionará de la misma manera que lo haría con el valor positivo pero con uno de los agentes apuntando en el sentido contrario. Una solución periódica y una solución estable lo seguirán siendo aunque uno de sus agentes cambie de dirección, por lo que, como se muestra en la figura 3.10, la gráfica del diagrama de fases es simétrica respecto a  $K = 0$ .

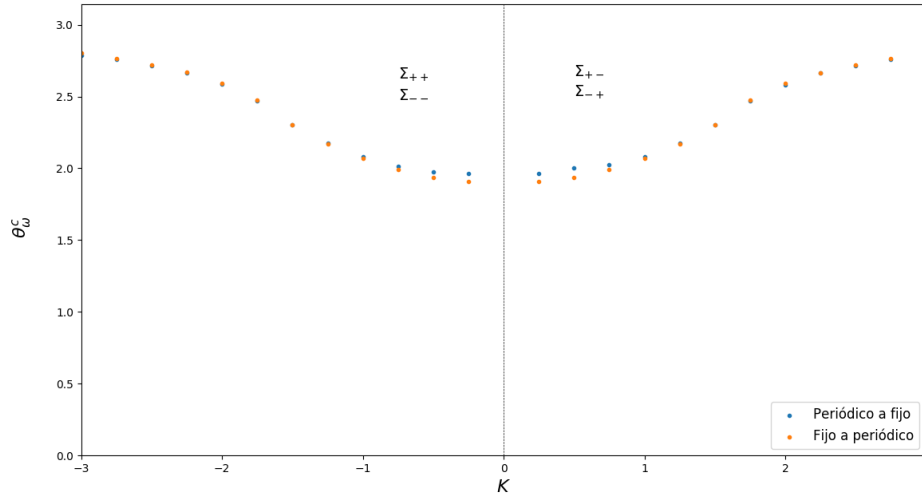


Figura 3.10:  $\theta_{\omega}^c$  vs.  $K$ , con  $K < 0$  incluido. Se ve como claramente los lugares de desaparición son simétricas respecto a  $K = 0$ .



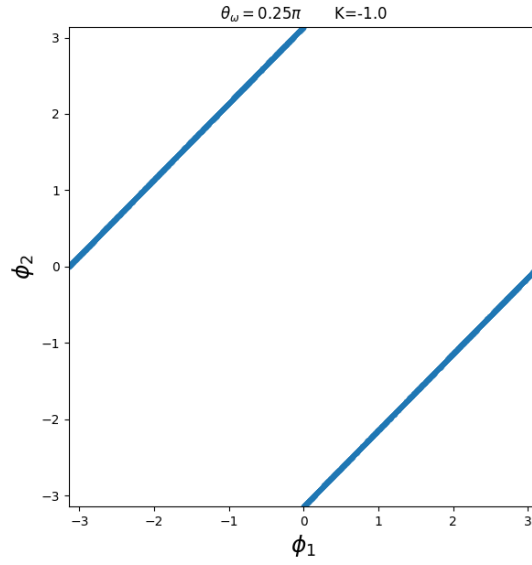


Figura 3.11: Coordenadas azimutales de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ . A diferencia de los casos  $K > 0$ , los agentes se mueven completamente en antifase.

No obstante, las soluciones que nos encontramos son, en cuestiones de coherencia, opuestas a las de  $K > 0$ . Al sustituir el signo de un solo  $\sigma$ , los agentes pasan de ir sincronizados, en fase, a orbitar en antifase, como se muestra en la figura 3.11.

# Capítulo 4

## Conclusiones

Al comenzar el TFG, tratamos al sistema que hemos estudiado ( $D = 3$ ,  $N = 2$ ,  $|\omega_i| = 1$ ) como un primer paso para un estudio más general del modelo de Kuramoto generalizado. Contra todo pronóstico, este modelo particular se mostró diverso en sí mismo, mostrando transiciones completamente diferentes a las que aparecen en el límite termodinámico.

Donde en el límite termodinámico la transición se determinaba mediante un aumento discontinuo de la coherencia, ahora viene dada por la presencia de soluciones oscilantes o fijas. Donde antes el acoplamiento crítico del sistema era determinado por la dispersión de los módulos de  $\omega_i$  ahora su dirección ocupa su puesto.

Hemos partido del sistema desacoplado, en el que ya se ven soluciones neutralmente estables: puntos fijos orientados hacia  $\pm\omega_i$ , y órbitas de los agentes en torno a  $\omega_i$ .

Al utilizar un pequeño  $K$ , se encuentra un estado en el que el ciclo límite es estable para cualquier valor de  $\theta_\omega$ , y los puntos fijos son estables desde  $\theta_\omega = \pi$  hasta  $\sim 0,8$ , existiendo un gran área de coexistencia. En el ciclo límite, para cualquier  $K > 0$ , tras un breve estado transitorio la componente azimutal de los agentes se sincroniza,  $\psi_1 = \psi_2$ . En el caso de los puntos fijos, al aparecer en  $\theta_\omega$  altos, los agentes se asientan en las soluciones  $\Sigma_{\pm\mp}$ , en las que los agentes se encuentran aproximadamente sobre  $\omega_1$ ,  $-\omega_2$   $-\omega_1$  ó  $\omega_2$ , consiguiendo que ambos se encuentren a un ángulo de aproximadamente  $\pi - \theta_\omega$ .

Cuando  $K$  es bajo pero el ciclo límite ya no es estable en  $\theta_\omega = \pi$ , el sistema adopta las soluciones que observaremos en el resto del sistema: ciclo límite para  $\theta_\omega$  bajos y puntos fijos para  $\theta_\omega$  altos; una zona de coexistencia para valores intermedios que se va reduciendo a medida que aumenta  $K$ . Hemos concluido que el ciclo límite presente en estos valores de  $K$  pierden la estabilidad al aumentar  $\theta_\omega$  mediante una bifurcación pitchfork subcrítica (de ciclos). Los puntos fijos pierden su estabilidad al reducir  $\theta_\omega$  a través de una bifurcación de Hopf subcrítica.

El tipo de bifurcación cambia cuando  $K$  es alto: los ciclos límite pierden su estabilidad en una bifurcación heteroclínica. Los nodos estables que dominan las  $\theta_\omega$  altas y las sillas implicadas en la heteroclínica se aniquilan entre sí en una bifurcación silla-nodo.

Por último, el análisis de  $K$  negativo resultó trivial debido a la simetría  $K \rightarrow -K$ ,  $\sigma_1 \rightarrow -\sigma_1$ ;  $K \rightarrow -K$ ,  $\sigma_2 \rightarrow -\sigma_2$ . Todas las fronteras se mantienen ya que cambiar el signo de  $K$  equivale a cambiar un vector por su opuesto. Lo que sí cambia es la forma de sincronizarse: en los puntos fijos pasamos de tener soluciones  $\Sigma_{+-}$ ,  $\Sigma_{-+}$  a tenerlas del estilo  $\Sigma_{++}$ ,  $\Sigma_{--}$ . Asimismo, en los ciclos límite los agentes pasan de girar en fase a girar en antifase. En ambos tipos de soluciones  $\rho$  tiene un módulo promedio más bajo que en valores de  $K > 0$ .

# Apéndice A

## Código

Las distintas simulaciones realizadas en este TFG han sido escritas por mí en Python (3.7), utilizando a menudo módulos matemáticos (“numpy”) y de representación gráfica (“matplotlib”). Otros paquetes como “time”, para medir tiempos de simulación o “os”, para utilizar comandos de S.O., se han usado esporádicamente.

En este capítulo describiremos las secciones clave del código. Los fragmentos de código presentes han sido editados en ocasiones, eliminando algunos comentarios, avisos de error o funcionalidades extra, de forma que el código sea lo más limpio y comprensible posible.

Los paquetes “numpy” y “matplotlib.pyplot” se cargan como “np” y “plt” respectivamente.

### funciones.py

Muchas de las simulaciones llevan a cabo procesos muy similares. Para no reescribir una vez tras otra las mismas líneas de código se ha creado el fichero “funciones.py”, en el que se incluyen las funciones básicas para la simulación. Por ello, todos los programas, además de los módulos particulares que necesiten, llevan en su cabecera

```
from funciones import *
```

de modo que todas las funciones estén disponibles.

### $\sigma$ y $\omega$

Los vectores  $\sigma$  y  $\omega$  son definidos como arrays bidimensionales 2x3, y se denominan “sigma” ó “s” y “omega” ó “w”. De forma que  $\sigma_1=s[0]$ ,  $\sigma_{1y}=s[0][1]$ , por ejemplo. De esta forma es fácil manejar todos los  $\sigma$  y  $\omega$  a la vez y se reduce mucho el número de variables que las funciones utilizan como argumento.

Ambas tienen una función en funciones.py que las crea e inicializa. La de ‘s’ lo hace con componentes aleatorias mediante la función randVecs:

```
def randVecs(num=2, dim=3, mod=1.0):
    aux=np.zeros((num, dim), float)
    for n in range(num):
        for m in range(dim):
            aux[n,m]=np.random.random()-0.5
        aux[n]=mod*normalize(aux[n])
    return aux
```

que está preparada para generar cualquier número de sigmas en cualquier dimensión. “num” es el número de vectores a generar y “dim” la dimensión de estos vectores. Se inicializan todas las componentes con un número aleatorio entre -0.5 y 0.5 y luego se normalizan los vectores. “normalize” es una función que normaliza un vector dado como argumento:

```
def normalize(vec):
    vec=vec/modCalc(vec)
    return(vec)
```

que a su vez utiliza la función “modCalc” para calcular el módulo del vector.

```
def modCalc( vec ):
    aux=0.0
    for n in range( len( vec ) ):
        aux+=vec [n]**2
    return(np.sqrt( aux ))
```

Los vectores  $w$  tienen también su función creadora, que pide como argumento  $\theta_\omega$ :

```
def createOmegas( theta ):
    w=np.zeros( (2,3), float )
    w[0]=0.0, np.sin( theta /2.0 ), np.cos( theta /2.0 )
    w[1]=0.0, -np.sin( theta /2.0 ), np.cos( theta /2.0 )
    return w
```

que crea los vectores como se describe en la sección 3.1.1.

## Runge-Kutta 4 y $f(x)$

La discretización de nuestro sistema es inevitable para su simulación numérica. Para llevarla a cabo utilizamos un método Runge-Kutta de 4º orden, cuya descripción detallada puede encontrarse en el libro de Strogatz[5]. Este método proporciona un error acumulativo del orden de  $h^4$ , donde  $h$  es, en nuestro caso, el incremento temporal entre iteraciones.

Primero tenemos que definir la función velocidad de  $\sigma$ ,  $f$ :

```
def f( s, w, k ):
    R=getRho( s )
    aux=np.zeros( (N, D), float )
    for n in range(N):
        aux [n]=k*( R - np.dot( R, s [n] ) * s [n] ) + np.cross( w[n], s [n] )
    return aux
```

que es una transcripción de la ec.(1.14). Las funciones “dot” y “cross” son el producto escalar y vectorial, respectivamente. “getRho” es una función que simplemente calcula el vector  $\rho$  a partir de los  $\sigma_i$ .

```
def getRho( s ):
    N=len( s )
    D=len( s [0] )
    auxRho=np.zeros( D, float )
    for n in range(N):
        auxRho += s [n]
    return auxRho/N
```

Simplemente hace una media, pero está preparado para cualquier tipo de sistema.

Una vez definido  $f$  es sencillo implementar el método Runge-Kutta de cuarto orden.

```
def RK( sigmas, omegas, k, show=0, n=1 ):

    k1=f( sigmas, omegas, k )
    k2=f( sigmas + k1*tau/2.0, omegas, k )
    k3=f( sigmas + k2*tau/2.0, omegas, k )
    k4=f( sigmas + k3*tau, omegas, k )

    sNext= sigmas + ( k1 + 2.0*( k2 + k3 ) + k4 ) * tau / 6.0
    return sNext
```

# Bibliografía

- [1] Sarthak Chandra, Michelle Girvan, and Edward Ott. Continuous versus discontinuous transitions in the D-dimensional generalized Kuramoto model: Odd D is different. *Physical Review X*, 9:011002, Jan 2019.
- [2] Arthur T Winfree. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *Journal of Theoretical Biology*, 16(1):15–42, 1967.
- [3] Steven H Strogatz. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 143(1-4):20, 2000.
- [4] LL. Bonilla et al. The Kuramoto model: a simple paradigm for synchronization phenomena. *Reviews of Modern Physics*, 77:137–185, 2005.
- [5] Steven Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Addison-Wesley Publishing Company, 1 edition, 1994.
- [6] JL Van Hemmen and WF Wreszinski. Lyapunov function for the kuramoto model of nonlinearly coupled oscillators. *Journal of Statistical Physics*, 72(1-2):145–166, 1993.